



引用格式:周春梅, 马 旭, 闫 洁. 拼接梯度压电材料中多裂纹的响应问题[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(18): 7433-7438.

Zhou Chunmei, Ma Xu, Yan Jie, et al. Response of multiple cracks in stitched graded piezoelectric materials[J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(18): 7433-7438.

# 拼接梯度压电材料中多裂纹的响应问题

周春梅, 马 旭, 闫 洁

(宁夏师范学院数学与计算机科学学院, 固原 756000)

**摘要** 研究了拼接梯度压电材料中多裂纹的响应问题, 考虑关于  $y$  轴对称的材料结构, 多个裂纹分布在  $x$  轴上。运用傅里叶变换技术并结合边界条件将混合边值问题转化为第一类奇异积分方程。引入位错函数, 并且通过高斯-切比雪夫方法对积分方程进行求解, 得出切应力和电位移的解析表达式以及裂纹端的强度因子表达式。最后借助 MATLAB 进行数值算例分析, 给出裂纹端强度因子受裂纹间距、裂纹几何尺寸、梯度参数以及材料带宽比的影响情况。

**关键词** 梯度压电材料; 界面裂纹; 奇异积分方程; 强度因子

中图法分类号 O343.7; 文献标志码 A

## Response of Multiple Cracks in Stitched Graded Piezoelectric Materials

ZHOU Chun-mei, MA Xu, YAN Jie

(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China)

**[Abstract]** The anti-plane problem of multi-cracks in tiled gradient piezoelectric materials was discussed. Consider the  $y$ -axis symmetric material structure, there are  $n$  cracks distributed along the  $x$ -axis. The mixed boundary value problem was transformed into the first kind of singular integral equation by using the Fourier transform technique and the boundary condition. The dislocation function was introduced and the integral equation was solved by Gauss Chebyshev method. The analytical expressions of shear stress and electric displacement and the expression of intensity factor at crack tip were obtained. Finally, numerical examples were given by MATLAB to show the influence of crack spacing, crack geometric size, gradient parameters and material width ratio on the strength factor at the crack tip.

**[Keywords]** gradient piezoelectric materials; multi-interface cracks; singular integral equation; stress intensity factor

梯度压电材料作为一种新型的复合智能材料, 兼具压电和梯度二者的优点, 被广泛应用于诸多工程领域。材料的复合虽然克服了单项材料的缺陷, 但又有许多新的问题需要解决。例如, 如何判定裂纹在这种新型材料中的稳定性是一个值得关注的课题。一般的金属材料, 都考虑用动应力强度因子、能量释放率、能量密度因子作为断裂分析的依据。对于裂纹扩张来说, 当材料呈脆性或小范围承受时, 应力强度因子通常作为断裂的依据。薛宇等<sup>[1]</sup>针对传统压电构建容易被破坏的问题, 提出了一个改进的功能梯度材料特性分布形式, 研究了材料分布类型、梯度分布指数和材料总体积分数对材料板振动控制的影响。张智娟等<sup>[2]</sup>研究了一种悬臂梁双晶压电能量采集装置的发电性能, 实验将两片双晶压电振子并联, 得到振动台频率、激励位移等对装置输出电压和负载功率的影响情况。刘婷等<sup>[3]</sup>介绍了 4 类压电材料的研究进展, 分析了它们

的结构特点、制作方法和应用场合, 并且展望了压电材料的未来发展趋势。李林利等<sup>[4]</sup>讨论了恒定温度场下压电材料矩形板的频率和振幅, 给出了温度对位移的影响, 以及速度、加速度的变化规律。穆翔等<sup>[5]</sup>研究了傅里叶变换在压电材料与热电材料的接触、断裂等问题中的应用。刘媛等<sup>[6]</sup>利用有限截项法分析了无限板圆孔边四不等长裂纹, 得到应力强度因子的接近程度与裂纹半长与半径比有关。祝青钰等<sup>[7]</sup>研究了椭圆孔边任意长度双裂纹复合型应力强度因子复变函数解。提出了一种基于 Muskhelishvili 复变函数理论和有限截项原则的强度因子求解方法, 得出强度因子受椭圆孔半轴比、夹角和裂纹长度的综合影响。梁瑞虹等<sup>[8]</sup>分析并制造了宽温域低损耗的新型压电材料与摩擦功能材料, 提出了通过相结构调控、增加第三组元、引入偶极子缺陷钉扎畴壁等方法来制备低损耗压电陶瓷材料。李洁等<sup>[9]</sup>研究了一种用于压电传感器

收稿日期: 2020-11-19; 修订日期: 2021-03-16

基金项目: 宁夏高等学校一流学科建设(教育学学科)(NXYLXK2017B11); 宁夏高等学校科学研究项目(NGY2020079); 宁夏师范学院本科教学项目(NJYKCJX2108); 宁夏师范学院校级科研项目(NXSFYB2179); 宁夏师范学院数学与计算机科学学院专业建设项目

第一作者: 周春梅(1982—), 女, 回族, 宁夏固原人, 硕士, 副教授。研究方向: 复分析及其在力学中的应用。E-mail:453315811@qq.com。

的柔性电极的制备及其性能分析。朱帅等<sup>[10]</sup>利用有限元模型,采用分层法进行材料的梯度仿真模拟,分析了功能梯度压电材料单裂纹的受力情况,得到缓解应力集中的参数算例结果。现对拼接压电材料中的共线多裂纹问题进行分析。

## 1 问题描述及理论分析

如图1所示,在x-y平面中,梯度压电材料(functionally graded piezoelectric material, FGPM)拼接在一均匀压电材料(piezoelectric material, PM)上,材料沿Z轴极化。裂纹位于高度为 $h_1+h_2$ 的梯度压电带 $y=0$ 的平面上,裂纹间距为 $2c$ ,裂纹的长度为 $|b_j-a_j|=2a_0$ ,设第j个裂纹的左右尖端在x轴的坐标分别为 $a_j, b_j$ ,裂纹表面处有反平面应力载荷 $\tau_{xy}=\tau(x)$ 、平面内的电位移 $D_y=D(x)$ 。

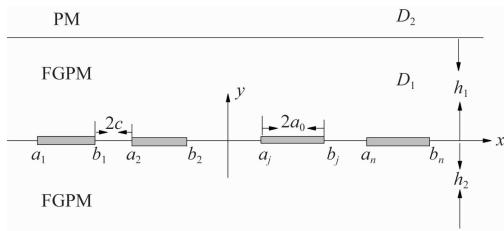


图1 拼接梯度压电材料中共线多裂纹模型

Fig. 1 The collinear multi-cracks model for gradient piezoelectric materials

压电材料的本构方程为

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz(i)} \\ D_{x(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44(i)}(y) & e_{15(i)}(y) \\ e_{15(i)}(y) & -\varepsilon_{11(i)}(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial w_i / \partial x \\ \partial \varphi_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz(i)} \\ D_{y(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44(i)}(y) & e_{15(i)}(y) \\ e_{15(i)}(y) & -\varepsilon_{11(i)}(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial w_i / \partial y \\ \partial \varphi_i / \partial y \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中: $\tau_{xz(i)}$ 、 $\tau_{yz(i)}$ 和 $D_{x(i)}$ 、 $D_{y(i)}$ 分别为应力和电位移; $w_i$ 和 $\varphi_i$ 为位移和电势; $i(i=1,2)$ 分别对应区域 $D_1$ 和 $D_2$ ; $c_{44(i)}$ 、 $e_{15(i)}$ 、 $\varepsilon_{11(i)}$ 分别为弹性刚度系数、介电常量、压电常量。

电场分量与电势有如下的关系:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (3)$$

假设梯度压电材料的弹、电性系数沿y轴按指数函数分布:

$$[c_{44(1)}(y), e_{15(1)}(y), \varepsilon_{11(1)}(y)] = e^{\beta y} [c_0, e_0, \varepsilon_0], \quad -h_2 < y < h_1 \quad (4)$$

$$[c_{44(2)}(y), e_{15(2)}(y), \varepsilon_{11(2)}(y)] = e^{\beta h_1} [c_0, e_0, \varepsilon_0], \quad y > h_1 \quad (5)$$

式中: $\beta$ 、 $c_0$ 、 $e_0$ 、 $\varepsilon_0$ 分别为功能梯度参数、剪切模

量、压电系数、介电常数。

静态平衡方程为

$$\begin{bmatrix} \partial \tau_{xz} / \partial x & \partial \tau_{yz} / \partial y \\ \partial D_x / \partial x & \partial D_y / \partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

由式(1)~式(6),得到控制方程为

$$\begin{cases} c_0 \left( \nabla^2 w_1 + \beta \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + e_0 \left( \nabla^2 \varphi_1 + \beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = 0 \\ e_0 \left( \nabla^2 w_1 + \beta \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) - \varepsilon_0 \left( \nabla^2 \varphi_1 + \beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad -h_2 < y < h_1 \quad (7)$$

$$\begin{cases} c_0 \nabla^2 w_2 + e_0 \nabla^2 \varphi_2 = 0 \\ e_0 \nabla^2 w_2 - \varepsilon_0 \nabla^2 \varphi_2 = 0 \end{cases}, \quad y > h_1 \quad (8)$$

由此可得

$$\begin{cases} \nabla^2 w_1 + \beta \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \\ \nabla^2 \varphi_1 + \beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad -h_2 < y < h_1 \quad (9)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 w_2 = 0 \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 \end{cases}, \quad y > h_1 \quad (10)$$

式(9)和式(10)解的形式为

$$\begin{cases} w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha, \\ \varphi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \end{cases}, \quad 0 \leqslant y < h_1 \quad (11)$$

$$\begin{cases} w_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \varphi_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_3(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \end{cases}, \quad -h_2 < y < 0 \quad (12)$$

$$\begin{cases} w_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ \varphi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_6(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \end{cases}, \quad y \geqslant h_1 \quad (13)$$

式(11)~式(13)的未知函数的表达式为

$$\begin{cases} f_1(\alpha, y) = A_1(\alpha) e^{p_1 y} + A_2(\alpha) e^{p_2 y} \\ f_2(\alpha, y) = B_1(\alpha) e^{p_1 y} + B_2(\alpha) e^{p_2 y} \\ f_3(\alpha, y) = C_1(\alpha) e^{p_1 y} + C_2(\alpha) e^{p_2 y} \\ f_4(\alpha, y) = D_1(\alpha) e^{p_1 y} + D_2(\alpha) e^{p_2 y} \\ f_5(\alpha, y) = E_1(\alpha) e^{-\alpha y} \\ f_6(\alpha, y) = F_1(\alpha) e^{-\alpha y} \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{式(14)中: } p_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2}}{2}; p_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2}}{2};$$

$A_i(\alpha)B_i(\alpha)、C_i(\alpha)、D_i(\alpha)、E_i(\alpha)、F_i(\alpha)$  为未知函数 ( $i=1,2$ )。

## 2 问题求解

由于材料结构关于  $y$  轴对称, 只需要考虑右半平面。边界条件及连续性条件<sup>[11]</sup>为

$$\begin{cases} \tau_{yz(1)}(x, h_1) = \tau_{yz(2)}(x, h_1), \\ D_{y(1)}(x, h_1) = D_{y(2)}(x, h_1) \\ D_{yz(1)}(x, -h_2) = 0, \quad \tau_{yz(1)}(x, -h_2) = 0 \\ w_1(x, h_1) = w_2(x, h_1), \\ \varphi_1(x, h_1) = \varphi_2(x, h_1) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz(1)}(x, 0^+) = \tau_{yz(1)}(x, 0^-) = \tau(x) \\ D_{y(1)}(x, 0^+) = D_{y(1)}(x, 0^-) = D(x) \end{cases}, \quad x \in [a_j, b_j] \quad (16)$$

$$\begin{cases} \tau_{yz(1)}(x, 0^+) = \tau_{yz(1)}(x, 0^-), \\ D_{y(1)}(x, 0^+) = D_{y(1)}(x, 0^-), \quad x \notin [a_j, b_j] \\ w_1(x, 0^+) = w_1(x, 0^-), \\ \varphi_1(x, 0^+) = \varphi_1(x, 0^-) \end{cases} \quad (17)$$

运用傅里叶变换, 并且利用边界条件式(15)~式(17), 得到下列方程:

$$A_1(\alpha)e^{p_1h_1} + A_2(\alpha)e^{p_2h_1} - E_1(\alpha)e^{-\alpha h_1} = 0 \quad (18)$$

$$B_1(\alpha)e^{p_1h_1} + B_2(\alpha)e^{p_2h_1} - F_1(\alpha)e^{-\alpha h_1} = 0 \quad (19)$$

$$c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 A_1(\alpha)e^{p_1h_1} + p_2 A_2(\alpha)e^{p_2h_1} + \alpha E_1(\alpha) \times e^{-\alpha h_1}] e^{-i\alpha x} d\alpha + e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 B_1(\alpha)e^{p_1h_1} + p_2 B_2(\alpha)e^{p_2h_1} + \alpha F_1(\alpha)e^{-\alpha h_1}] e^{-i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (20)$$

$$e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 A_1(\alpha)e^{p_1h_1} + p_2 A_2(\alpha)e^{p_2h_1} + \alpha E_1(\alpha) \times e^{-\alpha h_1}] e^{-i\alpha x} d\alpha - \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 B_1(\alpha)e^{p_1h_1} + p_2 B_2(\alpha) \times e^{p_2h_1} + \alpha F_1(\alpha)e^{-\alpha h_1}] e^{-i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (21)$$

$$c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 B_1(\alpha)e^{-p_1h_2} + p_2 B_2(\alpha)e^{-p_2h_2}] e^{-i\alpha x} d\alpha + e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 D_1(\alpha)e^{-p_1h_2} + p_2 D_2(\alpha)e^{-p_2h_2}] \times e^{-i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (22)$$

$$e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 B_1(\alpha)e^{-p_1h_2} + p_2 B_2(\alpha)e^{-p_2h_2}] e^{-i\alpha x} d\alpha - \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 D_1(\alpha)e^{-p_1h_2} + p_2 D_2(\alpha)e^{-p_2h_2}] \times e^{-i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (23)$$

式中:  $k(x, t) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_1 p_2 [1 - e^{(p_1-p_2)h_2}] [1 - e^{-(p_1-p_2)h_2}] [p_2 e^{(p_1-p_2)h_1} (\alpha + p_1) - p_1 (\alpha + p_2)]}{\alpha(p_1 - p_2) \{p_1(\alpha + p_2)[1 - e^{-(p_1-p_2)h_2}] + p_2(\alpha + p_1)e^{(p_1-p_2)h_1}[1 - e^{(p_1-p_2)h_2}\}]^2} e^{i\alpha(t-x)} d\alpha$

当  $\alpha \rightarrow \infty$  时,  $k$  有奇异项被分离, 可以表示为

$$c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 A_1(\alpha) + p_2 A_2(\alpha) - p_1 C_1(\alpha) - p_2 C_2(\alpha)] \times e^{-i\alpha x} d\alpha + e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 B_1(\alpha) + p_2 B_2(\alpha) - p_1 D_1(\alpha) - p_2 D_2(\alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (24)$$

$$e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 A_1(\alpha) + p_2 A_2(\alpha) - p_1 C_1(\alpha) - p_2 C_2(\alpha)] \times e^{-i\alpha x} d\alpha + e_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [p_1 B_1(\alpha) + p_2 B_2(\alpha) - p_1 D_1(\alpha) - p_2 D_2(\alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha = 0 \quad (25)$$

引入两个位错函数<sup>[12]</sup>  $s_1(x)$  和  $s_2(x)$ :

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [w_1(x, 0^+) - w_2(x, 0^-)], & x \in [a_j, b_j] \\ 0, & x \notin [a_j, b_j] \end{cases} \quad (26)$$

$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [\varphi_2(x, 0^+) - \varphi_1(x, 0^-)], & x \in [a_j, b_j] \\ 0, & x \notin [a_j, b_j] \end{cases} \quad (27)$$

将应力和电势的解代入式(26)、式(27)中, 并结合边界条件有

$$\int_{a_j}^{b_j} s_1(t) dt = \int_{a_j}^{b_j} s_2(t) dt = 0 \quad (28)$$

$x \in [a_j, b_j]$  时, 可得

$$s_1(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha [A_1(\alpha) + A_2(\alpha) - C_1(\alpha) - C_2(\alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (29)$$

$$s_2(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha [B_1(\alpha) + B_2(\alpha) - D_1(\alpha) - D_2(\alpha)] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (30)$$

应用 Fourier 变换法和边界条件式(15)~式(17)式求解方程组, 解出系数  $A_i(\alpha)、B_i(\alpha)、C_i(\alpha)、D_i(\alpha)、E_i(\alpha)、F_i(\alpha)$ 。再由本构方程和边界条件得到应力和电位移的解析表达式<sup>[13]</sup>为

$$\begin{cases} \tau_{yz(1)}(x, 0^+) = \tau(x) = \sum_{j=1}^n c_0 \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{\pi} k(x, t) \\ s_1(t) dt + \sum_{j=1}^n e_0 \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{\pi} k(x, t) s_2(t) dt \\ D_{y(1)}(x, 0^+) = D(x) = \sum_{j=1}^n e_0 \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{\pi} k(x, t) \\ s_1(t) dt - \sum_{j=1}^n \varepsilon_0 \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{\pi} k(x, t) s_2(t) dt \end{cases} \quad (31)$$

$$k(x,t) = \frac{1}{t-x} + l(x,t) \quad (32)$$

式(32)中:  $l(x,t) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2p_1 p_2 [1 - e^{(p_1-p_2)t_2}] [1 - e^{-(p_1-p_2)t_2}] [p_2 e^{(p_1-p_2)t_1} (\alpha + p_1) - p_1 (\alpha + p_2)]}{\alpha(p_1 - p_2) [p_1(\alpha + p_2) [1 - e^{-(p_1-p_2)t_2}] + p_2(\alpha + p_1) e^{(p_1-p_2)t_1} [1 - e^{(p_1-p_2)t_1}]]} + \frac{|\alpha|}{\alpha} \right) e^{i\alpha(t-x)} d\alpha$ 。

令

$$x = \frac{b_j - a_j^-}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \quad t = \frac{b_j - a_j^-}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \quad (33)$$

将式(32)、式(33)代入式(31), 方程被标准化为

$$\begin{aligned} \tau_{yz(1)}(x, 0^+) &= \sum_{j=1}^n c_0 \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} + \right. \\ &\quad \left. l \left( \frac{b_j - a_j^-}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \frac{b_j - a_j^-}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] f_1(\bar{t}) d\bar{t} + \\ &\quad \sum_{j=1}^n e_0 \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} + l \left( \frac{b_j - a_j^-}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{b_j - a_j^-}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] f_2(\bar{t}) d\bar{t} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} D_{y(1)}(x, 0^+) &= \sum_{j=1}^n e_0 \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} + \right. \\ &\quad \left. l \left( \frac{b_j - a_j^-}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \frac{b_j - a_j^-}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] f_1(\bar{t}) d\bar{t} - \\ &\quad \sum_{j=1}^n e_0 \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{1}{t-x} + l \left( \frac{b_j - a_j^-}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{b_j - a_j^-}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] f_2(\bar{t}) d\bar{t} \end{aligned} \quad (35)$$

式中:  $f_j(\bar{t}) = s_j(t)$  ( $j = 1, 2$ );  $t \in [a_j, b_j]$ 。式(28)的单值条件<sup>[14]</sup>为

$$\int_{-1}^1 f_1(\bar{t}) d\bar{t} = \int_{-1}^1 f_2(\bar{t}) d\bar{t} = 0 \quad (36)$$

通过 Gauss-Chebyshev 积分公式对第一类奇异积分方程式(34)和式(35)进行求解。基函数与权函数有如式(37)所示关系:

$$f_j(\bar{t}) = \frac{F_j(\bar{t})}{\sqrt{(1+\bar{t})(1-\bar{t})}}, \quad j = 1, 2 \quad (37)$$

式(34)、式(35)通过简化为 Chebyshev 多项式求解。

$$\begin{aligned} \tau_{yz(1)}(x, 0^+) &= c_0 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} F_1(t_k) \left[ \frac{1}{t_k - x_r} + \right. \\ &\quad \left. \pi l \left( \frac{b_j - a_j}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \frac{b_j - a_j}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] + \\ &\quad e_0 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} F_2(t_k) \left[ \frac{1}{t_k - x_r} + \pi l \left( \frac{b_j - a_j}{2} x_r + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{b_j - a_j}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} D_{y(1)}(x, 0^+) &= e_0 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} F_1(t_k) \left[ \frac{1}{t_k - x_r} + \right. \\ &\quad \left. \pi l \left( \frac{b_j - a_j}{2} x_r + \frac{b_j - a_j}{2}, \frac{b_j - a_j}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] - \\ &\quad e_0 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} F_2(t_k) \left[ \frac{1}{t_k - x_r} + \pi l \left( \frac{b_j - a_j}{2} x_r + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{b_j - a_j}{2}, \frac{b_j - a_j}{2} t_k + \frac{b_j - a_j}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} F_1(t_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} F_2(t_k) = 0 \quad (40)$$

式中:  $t_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ );  $x_r = \cos \frac{r}{n}\pi$  ( $r = 1, 2, \dots, n-1$ ) 分别是 Chebyshev 多项式的第一类和第二类节点。

最后解得裂纹端切应力强度因子和电位移强度因子<sup>[15]</sup>为

$$K_3^r(b_j) = -c_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_1(1) - e_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_2(1) \quad (41)$$

$$K_3^r(a_j) = c_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_1(-1) + e_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_2(-1) \quad (42)$$

$$K_3^D(b_j) = -e_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_1(1) + e_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_2(1) \quad (43)$$

$$K_3^D(a_j) = e_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_1(-1) - e_0 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{b_j - a_j}{2}} F_2(-1) \quad (44)$$

式中: 未知函数的值  $F_j(-1)$  ( $j = 1, 2$ ) 和  $F_j(1)$  可以分别从  $F_j(t_{n-1})$ 、 $F_j(t_{n-2})$ 、 $F_j(t_{n-3})$  和  $F_j(t_2)$ 、 $F_j(t_3)$ 、 $F_j(t_4)$  的二次插值得到。

### 3 数值计算及讨论

裂纹端强度因子正则化<sup>[16]</sup>为

$$K_{a_j} = \frac{K_3(a_j)}{\tau_0 / \sqrt{a_0}} = \frac{K_3^D(a_j)}{D_0 / \sqrt{a_0}} \quad (45)$$

$$K_{b_j} = \frac{K_3(b_j)}{\tau_0 / a_0} = \frac{K_3^D(b_j)}{D_0 / a_0} \quad (46)$$

取 PZT-4 为基本压电材料, 通过数值计算, 可以得到以下一些结论。

从图 2 得到正则化强度因子与裂纹长度  $2a_0$  的变化规律。第  $j$  个裂纹的左端  $a_j$  处的强度因子比裂纹右端  $b_j$  处的强度因子大。随着带宽比  $h_1/h_2$  的增大, 裂纹左右端处的强度因子逐渐增大, 从图形可以看出, 强度因子是平行的增大趋势。当带宽比的值固定不变时, 裂纹端的强度因子与裂纹长度  $2a_0$  有同样的变化趋势, 即裂纹长度增大时, 强度因子也增大。

从图 3 得到正则化强度因子随带宽比  $h_1/h_2$  的变化规律。可以看出与图 2 有相似的结论, 裂纹左端处的强度因子比裂纹右端处的强度因子大。随着非均匀参数  $\beta$  的增大, 裂纹左右端的强度因子逐渐增大, 并且也是平行的增大趋势。当非均匀参数

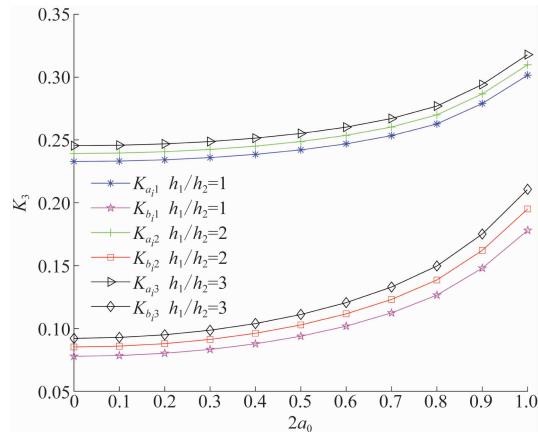


图 2 不同带宽比下, 裂纹长度与正则化强度因子的响应  
Fig. 2 Response of crack length to normalized intensity factor under different bandwidth ratios

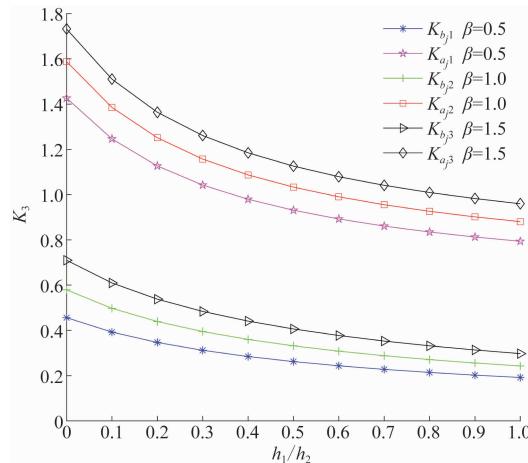


图 3 不同非均匀参数下, 带宽比与正则化强度因子的响应

Fig. 3 Response of bandwidth ratio and regularization intensity factor under different non-uniform parameters

$\beta$  固定不变时, 裂纹端的强度因子随着带宽比  $h_1/h_2$  的增大而减小。

从图 4 得到正则化强度因子随裂纹间距  $2c$  的变化规律。与前面的结论一致, 裂纹的左端处的强度因子比裂纹右端处的强度因子更大。随着非均匀参数  $\beta$  的增大, 裂纹左右端的强度因子逐渐增大, 这里可以看到, 当  $\beta = 1.5$  时, 线条有跳动的趋势, 不再是平行的变化情况。当非均匀参数  $\beta$  的值固定不变时, 裂纹端的强度因子随着裂纹间距  $2c$  的增大而减小。

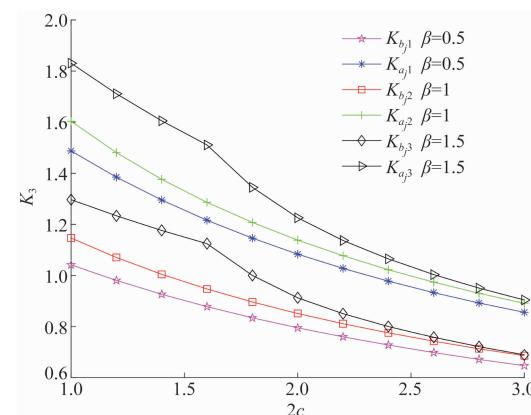


图 4 不同非均匀参数下, 裂纹间距与正则化强度因子的响应

Fig. 4 Response of crack spacing to regularized intensity factor under different inhomogeneous parameters

## 4 结论

讨论了拼接压电材料中共线多裂纹问题。利用傅里叶变换技术将边值问题转化为积分方程, 应用位错函数以及高斯-切比雪夫方法求解方程获得裂纹端的切应力和位移的解析式。最后的数值分析结果显示们, 裂纹端强度因子与裂纹几何长度、裂纹间距、材料带宽比以及非均匀梯度参数的关系密切。图 2 ~ 图 4 有统一的结果, 即裂纹左端的强度因子总比裂纹右端的强度因子大。随着带宽比以及非均匀梯度参数的增大, 裂纹端强度因子也随之增大; 当带宽比有确定值时, 裂纹长度增大时, 强度因子也增大; 当非均匀梯度参数有确定值时, 带宽比和裂纹间距增大时, 强度因子反而减小。

## 参 考 文 献

- [1] 薛宇, 杨洁, 李永存, 等. 非均匀电场下功能梯度压电材料板的振动主动控制 [J]. 科学技术与工程, 2019, 19(26): 129-135.  
Xue Yu, Yang Jie, Li Yongcun, et al. Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate with the non-uniform electric field [J]. Science Technology and Engineering, 2019, 19(26): 129-135.

- [2] 张智娟, 杨 瑞, 郑龙飞, 等. 悬臂梁双晶压电能量采集装置实验研究[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(35): 14518-14522.  
Zhang Zhijuan, Yang Rui, Zheng Longfei, et al. Experimental exploration of double crystal piezoelectric energy collection device on cantilever beam[J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20 (35): 14518-14522.
- [3] 刘 婷, 赵 程, 张刚华, 等. 应用于能量采集领域压电材料的研究进展[J]. 机械工程材料, 2020, 44(6): 82-87.  
Liu Ting, Zhao Cheng, Zhang Ganghua, et al. Research progress on piezoelectric materials in field of energy harvesting[J]. Materials for Mechanical Engineering, 2020, 44(6): 82-87.
- [4] 李林利, 薛春霞. 压电材料矩形板的热振动分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2019, 40(1): 1-7.  
Li Linli, Xue Chunxia. Thermal vibration analysis of piezoelectric materials rectangular plates[J]. Journal of North University of China(Natural Science), 2019, 40(1): 1-7.
- [5] 穆 翔, 丁生虎. 傅里叶变换在材料中的应用[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 278-288.  
Mu Xiang, Ding Shenghu. The application of Fourier transform in materials[J]. Pure Mathematics, 2018, 8(3): 278-288.
- [6] 刘 媛, 王桂霞, 李联和, 等. 无限板圆孔边四不等长裂纹问题[J]. 数学的实践与认知, 2019, 49(21): 166-172.  
Liu Yuan, Wang Guixia, Li Lianhe, et al. The problem for the infinite plate with four asymmetry cracks emanating from a circular hole [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2019, 49(21): 166-172.
- [7] 祝青钰, 周 锐. 椭圆孔边任意长度双裂纹复合型应力强度因子复变函数解[J]. 机械强度, 2019, 41(4): 983-987.  
Zhu Qingyu, Zhou Rui. Complex variable function solutions of mixed-mode stress intensity factors for two cracks of arbitrary length emanating from an elliptical hole [J]. Journal of Mechanical Strength, 2019, 41(4): 983-987.
- [8] 梁瑞虹, 赵 盖, 陈 宁, 等. 超声电机宽温域低损耗压电与摩擦功能材料[J]. 光学精密工程, 2020, 28(4): 771-781.
- Liang Ruihong, Zhao Gai, Chen Ning, et al. Wide-temperature-range and low-loss piezoelectric and friction functional materials of ultrasonic motor[J]. Optics and precision Engineering, 2020, 28 (4): 771-781.
- [9] 李 洁, 方兆舟, 王 晨, 等. 一种用于压电传感器的柔性电极的制备及其性能研究[J]. 功能材料, 2020, 51(9): 146-150.  
Li Jie, Fang Zhaozhou, Wang Chen, et al. Preparation and properties of a flexible electrode for the piezoelectric sensor[J]. Functional Materials, 2020, 51(9): 146-150.
- [10] 朱 帅, 刘海涛. 基于分层法功能梯度压电材料单裂纹的受力分析[J]. 燕山大学学报, 2019, 43(6): 525-530.  
Zhu Shuai, Liu Haitao. Stress analysis of single crack in functionally graded piezoelectric materials based on layering method[J]. Journal of Yanshan University, 2019, 43(6): 525-530.
- [11] Sun J L, Zhou Z G, Wang B. Dynamic behavior of unequal parallel permeable interface multi-cracks in a piezoelectric layer bonded to two piezoelectric materials half planes[J]. European Journal of mechanics A/solids, 2004, 23: 993-1005.
- [12] Narita F, Shindo Y. Dynamic anti-plane shear of a cracked piezoelectric ceramic [J]. Theoretical Applied Fracture Mechanics, 1998, 29: 169.
- [13] 李 星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
Li Xing. Integral equation[J]. Beijing: Science Press, 2003.
- [14] Wang Y S, Wang D. Shear wave scattering from a partially bonded elastic elliptic inclusion[J]. Mech Rescommu, 1995, 22 (1): 79-86.
- [15] Gu B, Yu S W, Feng X Q. Transient response of an insulating crack between dissimilar piezoelectric layers under mechanical and electrical impacts[J]. Archive of Applied Mechanics, 2002, 72(8): 615-629.
- [16] Erdogan F. The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under anti-plane shear loading[J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, 52(4): 823-828.