



引用格式:李豪杰,独知行,石娴,等.一种改进的动态灰色GM(1,1)模型在深基坑形变监测中的预测分析[J].科学技术与工程,2020,20(28):11442-11446

Li Haojie, Du Zhixing, Shi Xian, et al. Predictive analysis based on an improved dynamic grey GM (1,1) model in deep-base pit deformation monitoring [J]. Science Technology and Engineering, 2020, 20(28): 11442-11446

一种改进的动态灰色GM(1,1)模型在深基坑形变监测中的预测分析

李豪杰,独知行*,石娴,赵曰耀,张家威

(山东科技大学测绘科学与工程学院,青岛 266590)

摘要 针对传统GM(1,1)模型在处理浮动较大数据时精度不高的问题,提出了一种基于背景值优化和残差改进的动态GM(1,1)模型。利用复化Simpson3/8求积公式取代传统的算数均值计算模式,再通过原始序列的新陈代谢来实现模型的动态更新,在此基础上联立残差GM(1,1)模型,得到改进后的GM(1,1)模型。结合某地铁深基坑沉降观测数据,并对比于传统GM(1,1)模型的预测结果,发现提出的改进后GM(1,1)模型具有更高的精度和更好的适用性。

关键词 背景值优化;残差改进;动态GM(1,1)模型;复化Simpson3/8求积公式;深基坑沉降

中图法分类号 P258; **文献标志码** A

Predictive Analysis Based on an Improved Dynamic Grey GM (1,1) Model in Deep-base Pit Deformation Monitoring

LI Hao-jie, DU Zhi-xing*, SHI Xian, ZHAO Yue-yao, ZHANG Jia-wei

(College of Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

[Abstract] The traditional GM (1,1) model is not accurate in dealing with floating large data. In view of the problem, a dynamic GM (1,1) model based on background value optimization and residual improvement was proposed. The traditional calculation mean calculation mode was realized by the compounding Simpson 3/8 accumulation formula, and the dynamic update of the model was realized through the metabolism of the original sequence. On the basis of which the residual GM (1,1) model was combined, and the improved GM (1,1) model was obtained. Combined with the observation data of a subway deep pit subsidence and compared with the prediction results of the traditional GM (1,1) model, it is found that the improved GM (1,1) model has higher precision and better applicability.

[Key words] background value optimization; residual improvement; dynamic GM (1,1) model; compounding Simpson 3/8 accumulation formula; settlement of deep foundation pit

地铁深基坑的形变监测易受到周边高层建筑、道路及基坑自身荷载的影响,沉降波动较大,传统GM(1,1)模型主要对具有强烈指数规律的单调序列预测效果明显,这给深基坑沉降的后续预测增加了难度,为确保工程安全稳定运行,采用合适的模型改进方法显得尤为重要^[1-3]。蒋诗泉等^[4]提出应用数值积分思想提高模型参数精度,即通过复化梯形公式对传统GM(1,1)模型背景值进行优化,经算例分析验证了优化后模型对于背景值误差的修正作用;张贵钢等^[5]通过权衡信息的时效性,构建了动态GM(1,1)模型,并且通过残差改进,进一步提高了预测值的精度;徐旭等^[6]直接从灰色系统理论出发,对非等时距观测值进行变换处理,并在传统

模型基础上结合残差GM(1,1)模型,证明了改进方法在高层建筑沉降的可行性。以上模型仅进行了一种或两种方法的改进,且在背景值优化时梯形公式的高次插值会出现Runge现象,得到的预测结果均有待提高。鉴于此,本文以某地铁深基坑工程为例,利用复化Simpson3/8公式优化背景值,同时兼顾新信息的权重和预测残差值,建立了基于背景值优化和残差改进的动态GM(1,1)模型,开展基坑沉降预测研究,取得了良好的实验结果。

1 传统的灰色GM(1,1)模型

1.1 模型构建原理

设某系统原始观测序列为 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1),$

收稿日期:2019-11-21; 修订日期:2020-01-24

第一作者:李豪杰(1995—),男,汉族,山西吕梁人,硕士研究生。研究方向:变形监测理论与技术。E-mail: haojiali0911@163.com。

*通信作者:独知行(1965—),男,汉族,江苏沛县人,博士,教授,博士研究生导师。研究方向:地壳形变及地球动力学。E-mail: zhixingdu65@163.com。

$x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, 对其进行一次累加生成AGO序列: $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$, 式中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ 。 $Z^{(1)}$ 为模型背景值: $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\}$, 其中 $z^{(1)} = \frac{x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)}{2}$ ($k = i = 2, 3, \dots, n$)。

系统预测 GM(1,1) 模型的白化形式的微分方程表示为: $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 。其中参数 a, b 为待解

系数, 分别称为发展系数和灰色作用量。 a 的有效区间是 $(-2, 2)$, 反映了系统发展的趋势; b 是从背景值挖掘出的数据, 反映的是数据变化的关系^[7-8]。

根据最小二乘原理, 解上述微分方程可得: $[a, b]^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y}$, 式中:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

则预测值关于时间序列的映射函数即为白化方程的解:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[x^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (2)$$

最后通过累减实现序列还原, 预测公式为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (3)$$

1.2 模型精度评定

为了保证模型预测分析的可靠性, 必须对构建的模型进行评价, 一般采用后验差检验法^[9]。

(1) 先计算观测数据的均值与方差: $\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i)$; $s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x^{(0)}(i) - \bar{x}^{(0)}]^2$ 。

(2) 再计算残差均值与方差: $\bar{\varepsilon}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon^{(0)}(i)$; $s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [\varepsilon^{(0)}(i) - \bar{\varepsilon}^{(0)}]^2$ 。

(3) 根据方差 s_1, s_2 , 得到后验方差比: $C = \frac{s_2}{s_1}$ 。

(4) 小误差概率: $P = P\{|\varepsilon^{(0)}(i) - \bar{\varepsilon}^{(0)}| < 0.6475s_1\}$ 。

(5) 平均相对误差: $\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\varepsilon^{(0)}(i)|}{x^{(0)}(i)}$ 。

对于评定构建出模型的好坏, 主要看 C 和 P , 总体来说, C 越小越好, P 越大越好, 具体的精度评定标准如表 1 所示^[10]。

表 1 模型精度检验标准

Table 1 Model accuracy test standards

预测精度	优秀	良好	合格	不合格
P	>0.95	$0.95 \sim 0.80$	$0.80 \sim 0.70$	<0.70
C	<0.35	$0.35 \sim 0.50$	$0.50 \sim 0.65$	>0.65

2 改进后的动态 GM(1,1) 模型

2.1 背景值的优化

灰色 GM(1,1) 模型预测精度主要取决于参数 a, b , 而 a, b 的取值依赖于背景值的构造形式, 因此, 背景值的构造公式直接影响到模型的预测精度^[11]。采用的复化 Simpson3/8 公式进行优化, 即在区间 $[k, k+1]$ 上选取系列等距分点作为插值节点, 利用函数逼近的思想求解背景值。

假定一阶累加序列模型为 $x^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) = Ae^{Bt} + C$ ($t \geq 1$), 推导得出各系数:

$$A = \frac{x^{(0)}(k+1)}{\left[\frac{x^{(0)}(k+1)}{x^{(0)}(k)} \right]^k \left[1 - \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k+1)} \right]} \quad (4)$$

$$B = \ln x^{(0)}(k+1) - \ln x^{(0)}(k) \quad (5)$$

$$C = \frac{x^{(0)}(k+1)x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k+1)x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)} \quad (6)$$

则称 $x^{(1)}(t) = Ae^{Bt} + C$, ($t \geq 1$) 为累加序列的预测模型。

记积分区间 $[k, k+1] = [a, b]$, 将区间分成 n 等份, 步长 $h = (b-a)/n$, 等距分点 $t_k = a + kh$, 当 $n = 3$ 时, 相应的 Simpson3/8 插值求积公式如下:

$$\int_a^b x(t) dt = \frac{b-a}{8} \left[x(a) + 3x\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3x\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + x(b) \right] \quad (7)$$

若将每个子区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 划分为 3 等份, 内分节点依次记作 $t_{k+1/3}, t_{k+2/3}$, 则复化 Simpson 3/8 公式即为区间 $[a, b]$ 内的背景值 $z^{(1)}(b)$:

$$z^{(1)}(b) = \frac{h}{8} \sum_{k=0}^{n-1} [x(t_k) + 3x(t_{k+1/3}) + 3x(t_{k+2/3}) + x(t_{k+1})] = \frac{h}{8} \left[x(a) + 3 \sum_{k=0}^{n-1} x(t_{k+1/3}) + 3 \sum_{k=0}^{n-1} x(t_{k+2/3}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} x(t_k) + x(b) \right] \quad (8)$$

选定区间划分的份数 n 后, 计算每个子区间的内分节点对应的累加值, 再应用式(8), 得到优化后的背景值。相比较传统的算术均值、复化梯形公式, 复化 Simpson 3/8 公式将积分子区间更加细化, 对于区域内积分面积的把握更加准确, 进而改善了背景值的求积精度。

2.2 动态 GM(1,1) 模型原理

传统的 GM(1,1) 模型本质上是指数函数, 预测值随时间的增加呈单调递增的变化。在形变监测

中,被监测建筑物往往处于一个波动起伏的动态系统中,此时若直接采用传统的GM(1,1)模型进行长期预测,预测值将随时间得增加误差不断增大,精度不断降低^[12]。因此需要在预测中加重新信息的权重,即实时引入新的监测信息,淘汰时序相距较远的监测信息,这样改进后的动态GM(1,1)模型能够比较准确地反映系统的变化状况,从而有效提高形变预测的精度。

利用动态灰色模型进行预测时,要确定好模型的维度,即构建传统模型时的总期数n。首先通过传统的GM(1,1)模型预测得到t=n+1时刻的沉降;再引入实测中t=n+1时刻的沉降x⁽⁰⁾(n+1),同时去掉原始序列中的x⁽⁰⁾(1),构建n维动态GM(1,1)模型序列X⁽⁰⁾={x⁽⁰⁾(2),x⁽⁰⁾(3),...,x⁽⁰⁾(n+1)},得到新的GM(1,1)模型,进而预测t=n+2时刻的沉降值x⁽⁰⁾(n+2)。以此类推,逐个预测,得到实时更新的沉降预测值。

2.3 灰色模型的残差改正

为了达到更好的预测效果,采用n期残差序列作为原始观测数据,构建残差GM(1,1)模型,预测t=n+1时刻的残差值,并结合原来的预测模型进行修正。其改进措施如下:

利用残差原始序列建模:

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1) = \left[\varepsilon^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a} \quad (9)$$

联立原模型,构建残差改进后的GM(1,1)模型:

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(0)}(k+1) + \hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1) \quad (10)$$

3 实例分析

该工程主要是对某地铁车站深基坑进行地表沉降监测,在主体基坑施工过程中,围护桩受到自身轴力、桩顶水平位移、桩体水平位移影响,观测数据浮动较大。为了更好预测工程后续的沉降变化,保证车站长期运营和后续维护,从背景值、动态序列、残差值三个方面出发,对模型逐步改进,并将预测值与实测值进行比对分析。现选取沉降观测中较为典型的点位,同时为了确保初始序列呈等时距,选择14期月初的观测数据进行计算分析。利用1~4期沉降观测值构建传统的GM(1,1)模型,得到的时间响应关系式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = [x^{(1)}(1) + 18.6705] e^{0.0777k} - 18.6705 \quad (11)$$

根据2.1中的定理,通过优化背景值来改进模型求解,优化过程大致为①计算原始序列累加值AGO,将每个区间二等分;②在区间[1,2]内计算累加序列模型x⁽¹⁾(t)=Ae^{Bt}+C,并求出各内分节点

值;③应用复化Simpson3/8插值求积公式求解改进的背景值z⁽¹⁾(2)。

以此类推,得出各个区间改进后背景值,构成新的背景值序列Z⁽¹⁾={z⁽¹⁾(2),z⁽¹⁾(3),...,z⁽¹⁾(n)}。选择前4期沉降数据构建背景值优化GM(1,1)模型,得到优化后的模型关系式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = [x^{(1)}(1) + 22.8781] e^{0.0648k} - 22.8781 \quad (12)$$

两种模型的构建结果如表2所示。

表2 构建传统GM(1,1)模型与背景值优化的GM(1,1)模型

Table 2 Construction of traditional GM(1,1) model and GM(1,1) model of background value optimization

时序/期	累积时间间隔/d	实测值/mm	传统模型拟合值/mm	背景值优化的模型拟合值/mm
1	0	0	0.0000	0.0000
2	30	1.2	1.5086	1.5315
3	60	3.4	3.1390	3.1656
4	90	4.9	4.9013	4.9089
模型构建精度		C=0.1932, P=0.75	C=0.1937, P=1	

结合表1、表2,选择1~4期观测值构建的传统模型精度为合格,背景值优化的模型精度为优秀。相比于传统模型,背景值优化的模型将构建精度提升两个等级,改善效果明显。由此可见,本文提出的基于复化Simpson3/8公式构建的模型对于波动性较大的数据更具适应性。

根据表2,两种模型均可以进行进一步的预测分析,得到的结果如表3所示。

可见随着时序的增加,实测值离散速度变快,传统模型的预测值与实测值出现较大的偏差,模型整体的预测精度降低。通过优化背景值建立的新预测模型,每一期的相对误差均有改善,但是后期得到的预测值仍不理想,进而考虑在此基础上构建动态优化模型。

通过实时更新观测数据,构建动态GM(1,1)模型,即利用前4期数据建模,预测第5期数据,然后用第5期数据取代第1期数据重新建模,预测第6期数据,以此类推,得到动态预测序列。同时,考虑到残差对预测值的影响,以动态GM(1,1)模型预测值残差为原始序列,构建残差GM(1,1)模型:

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1) = [\varepsilon^{(0)}(5) - 15.3333] e^{-0.0613k} + 15.3333 \quad (13)$$

经残差、背景值改进,可以求得动态GM(1,1)模型时间响应函数式为

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) + [\varepsilon^{(0)}(5) - 15.3333] \times e^{-0.0613k} + 15.3333 \quad (14)$$

代入计算每一期的预测值,分析比较改进后模型的优越性,结果如表4所示。

表3 传统GM(1,1)模型与背景值优化的GM(1,1)模型预测结果

Table 3 Traditional GM (1,1) model and background value optimization GM (1,1) model prediction results

时序/ 期	累积时间/ 间隔/d	实测值/ mm	传统GM(1,1)模型			背景值优化的GM(1,1)模型		
			模型预测值/ mm	残差/ mm	相对误差/ %	模型预测值/ mm	残差/ mm	相对误差/ %
5	120	5.9	6.805 9	-0.905 9	-15.355	6.768 9	-0.868 9	-14.727
6	150	7.2	8.864 5	-1.664 5	-23.119	8.753 4	-1.553 4	-21.575
7	180	8.1	11.089 5	-2.989 5	-36.907	10.870 6	-2.770 6	-34.205
8	210	10.6	13.494 3	-2.894 3	-27.304	13.129 5	-2.529 5	-23.863
9	240	12.9	16.093 4	-3.193 4	-24.755	15.539 5	-2.639 5	-20.461
10	270	14.8	18.902 5	-4.102 5	-27.720	18.110 8	-3.310 8	-22.370
11	300	16.2	21.938 7	-5.738 7	-35.424	20.854 1	-4.654 1	-28.729
12	330	16.8	25.220 3	-8.420 3	-50.121	23.780 9	-6.980 9	-41.553
13	360	17.6	28.767 0	-11.167 0	-63.449	26.903 6	-9.303 6	-52.861
14	390	17.8	32.600 4	-14.800 4	-83.148	30.235 2	-12.435 2	-69.861
平均相对误差/%			30.051			26.065		

表4 经背景值优化的动态GM(1,1)模型与经残差、背景值改进的动态GM(1,1)模型预测结果

Table 4 Dynamic GM (1,1) model optimized by background value and dynamic GM (1,1) model predicted by residual and background value improvement

时序/ 期	累积时间/ 间隔/d	实测值/ mm	经背景值优化的动态GM(1,1)模型			经残差、背景值改进的动态GM(1,1)模型		
			模型预测值/ mm	残差/ mm	相对误差/ %	模型预测值/ mm	残差/ mm	相对误差/ %
5	120	5.9	6.768 9	0.868 9	14.727	5.898 9	-0.001 1	-0.018
6	150	7.2	6.592 3	-0.607 7	-8.441	7.452 8	0.252 8	3.511
7	180	8.1	8.248 4	0.148 4	1.832	7.439 0	-0.661 0	-8.160
8	210	10.6	9.069 9	-1.530 1	-14.435	9.831 1	-0.768 9	-7.254
9	240	12.9	13.944 2	1.0442	8.095	13.228 3	0.328 3	2.545
10	270	14.8	16.461 9	1.661 9	11.229	15.788 6	0.988 6	6.680
11	300	16.2	16.507 2	0.307 2	1.896	15.874 0	-0.326 0	-2.013
12	330	16.8	17.341 1	0.541 1	3.221	16.745 5	-0.054 5	-0.324
13	360	17.6	17.294 1	-0.305 9	-1.738	17.854 2	0.254 2	1.444
14	390	17.8	17.950 0	0.150 0	0.843	17.423 2	-0.376 8	-2.117
平均相对误差/%			6.646			3.407		

根据表4,经背景值优化的动态GM(1,1)模型的平均相对误差为6.646%,经残差、背景值改进的动态GM(1,1)模型的平均相对误差仅为3.047%。对比表3结果,动态改进后的模型每一期相对误差均明显减小,其中通过残差改进,预测值精度更高,与实测值更为吻合。利用预测值绘制拟合曲线,如图1所示。

由图1可以看出,观测期间原始数据的波动起伏较大。从第10期观测开始,观测值逐渐趋于稳定,传统GM(1,1)模型和背景值优化的GM(1,1)模型仍保持单调上升的趋势,与实测值差距越来越大。基于残差、背景值优化的动态GM(1,1)模型始终随着观测数据的变化而变化,且二者的数值十分接近。

4 结论

在传统GM(1,1)模型基础上,利用复化Simpson3/8公式优化背景值,进而改善了模型的整体精

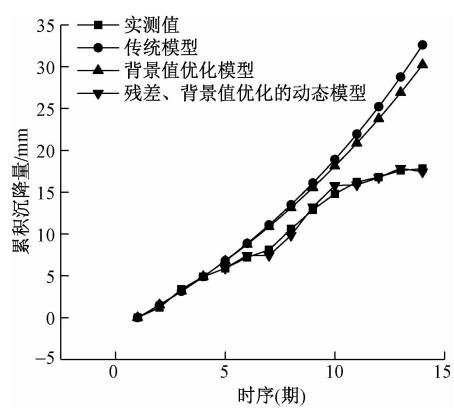


图1 传统模型和改进后模型预测值比较
Fig. 1 Comparison of traditional models and improved model predictions

度,这在模型构建中体现较为明显,但随着期数的增加,预测值与实测值间出现较大的偏差。通过构建背景值优化的动态GM(1,1)模型,可将预测精度提高23.405%,预测值与实测值趋势更加吻合。考

虑到在新旧信息迭代过程中不可避免会累积一些观测值偶然误差,为此进行的残差改进可将模型预测精度再次提高3.239%。因此,基于背景值优化、残差改进的动态GM(1,1)模型精度更高,更具适用性,继而可以作为该工程的预测模型来进行后续的研究分析。

参 考 文 献

- 1 赵福洪,罗志清,杨建文.七种数学模型在沉降预测中的优缺点比较分析[J].测绘工程,2014,23(3):59-62.
Zhao Fuhong, Luo Zhiqing, Yang Jianwen. A comparative analysis of the advantages and disadvantages of seven mathematical models in the prediction of sedimentation[J]. Surveying and Mapping Engineering, 2014, 23(3): 59-62.
- 2 奚家米,丁卫锋,吴迪.基于复杂环境下软土基坑开挖阶段的变形监测与分析[J].科学技术与工程,2019,19(29):254-259.
Xi Jiami, Ding Weifeng, Wu Di. Deformation monitoring and analysis of soft soil foundation pit excavation based on complex environment [J]. Science Technology and Engineering, 2019, 19 (29) : 254-259.
- 3 Zhang Z G, Bai Q M, Jiang Y J, et al. In-situ monitoring analyses of the influences of deep foundation pit excavation on adjacent metro tunnels and surrounding strata[J]. Modern Tunnelling Technology, 2017, 54(2): 177-184.
- 4 蒋诗泉,刘思峰,周兴才.基于复化梯形公式的GM(1,1)模型背景值的优化[J].控制与决策,2014,29(12):2221-2225.
Jiang Shiquan, Liu Sifeng, Zhou Xingcai. Optimization of the GM(1,1) model background value based on the compounding ladder formula [J]. Control and Decision-Making, 2014, 29 (12) : 2221-2225.
- 5 张贵钢,杨志强,朱健.基于残差改正的动态GM(1,1)模型在公路边坡变形监测中的应用[J].测绘科学,2010,35(4):148-150.
Zhang Guigang, Yang Zhiqiang, Zhu Jian. The application of dynamic GM(1, 1) model based on residual correction in road slope deformation monitoring[J]. Surveying Science, 2010, 35(4) : 148-150.
- 6 徐旭,黄声享,高方强,等.基于残差改正的动态非等时距灰色模型及应用[J].测绘地理信息,2015,40(3):48-51.
Xu Xu, Huang Shengsheng, Gao Fangqiang, et al. Based on residual correction of the dynamic non-equidistant gray model and application Mapping Geographic Information, 2015, 40(3) : 48-51.
- 7 Xie W, Lu K L, Zhu D Y. Partition excavation of a subway deep foundation pit: monitoring and numerical simulation[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2017, 34 (12) : 106-110.
- 8 廖媛,何志芳,王明刚.改进GM(1,1)模型在城市流动人口预测中的应用[J].科学技术与工程,2012,12(3):709-711.
Liao Yuan, He Zhifang, Wang Minggang. Application of improved GM(1, 1) model in urban floating population prediction[J]. Science Technology and Engineering, 2012, 12(3) : 709-711.
- 9 魏玉明,张永志.基于最小二乘配置法的优化GM(1,1)预测模型及其应用[J].大地测量与地球动力学,2017,37(3):297-301.
Wei Yuming, Zhang Yongzhi. Optimized GM(1, 1) prediction model based on least square collocation and its application[J]. Geodesy and Geodynamics, 2017, 37(3) : 297-301.
- 10 文建华,卢菁,陈子俊,等.隧道围岩收敛变形的改进GM(1,1)预测模型[J].中国科技论文,2014,9(5):587-589.
Wen Jianhua, Lu Jing, Chen Zijun, et al. Improved GM (1, 1) prediction model for convergence deformation of tunnel surrounding rock[J]. Chinese Science and Technology Paper, 2014, 9 (5) : 587-589.
- 11 王承庆.基于正弦变换和背景值优化的灰色GM(1,1)模型研究[J].重庆理工大学学报(自然科学),2017,31(12):199-202.
Wang Chengqing. Research on Grey GM (1, 1) model based on sine transform and background value optimization [J]. Journal of Chongqing University of science and Technology (Natural Science), 2017, 31(12) : 199-202.
- 12 曾贤敏,黄腾,李桂华,等.新陈代谢GM(1,1)模型在大坝边坡沉降监测中的应用[J].测绘工程,2015,24(8):53-56.
Zeng Xianmin, Huang Teng, Li Guihua, et al. Application of metabolic GM (1, 1) model in dam slope settlement monitoring [J]. Mapping Engineering, 2015, 24(8) : 53-56.