第 13 卷 第 6 期 2013 年 2 月
1671—1815(2013)06-1606-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 13 No. 6 Feb. 2013
© 2013 Sci. Tech. Engrg.

动力技术

热传导温度场不确定性数值分析

杜秀云[1,2] 唐祯安[1]

(大连理工大学微电子学院[1], 大连 116024; 辽宁师范大学物理与电子技术学院[2], 大连 116029)

摘 要 基于单元分析的区间有限元法和矩阵摄动理论,建立了稳态热传导温度场不确定性分析的数值求解模型。空间上,采用八节点等参元技术进行离散,利用区间有限元法,分别建立不确定系统中确定性部分和不确定性部分的有限元数值模型,进而得到温度响应的区间范围。文中不仅考虑了非均质和参数分布的影响,而且也给出了相应的数值算例。数值结果证明了所建分析模型的有效性和可行性。

关键词 不确定性 区间分析 热传导 矩阵摄动

中图法分类号 TK124; **文献标志码** A

在很多实际工程结构中,一些重要的结构参数往往存在误差或不确定性。处理不确定性问题的方法主要有三种:随机模型、模糊模型和区间分析模型[1],分别适用于解决不同类型的不确定性问题。区间分析模型则适用于统计信息不足以描述不确定参数的概率分布或隶属函数,或者仅知道不确定参数的取值范围,并想获得响应的区间范围的情况。目前,区间分析方法在结构动力特性分析方面已经取得许多成果[2—4]。

热传导问题是实际工程中十分普遍的现象。以往的研究中,众多学者关注重点是将热物性参数、边界条件以及初始条件均看作确定性参量,进行确定性的温度场分析。但在实际中,许多结构的热物性参数以及边界条件往往存在误差或者不确定性,需要对温度场进行不确定性分析,而目前该领域的研究还相对较少。近年来,部分学者针对热传导不确定性问题进行了研究,并取得一些成果,但仍有不足,如利用概率方法有时不能得到可靠的结果,时域上差分格式容易产生较大的误差等[5,6]。

2012 年 10 月 8 日收到,10 月 31 日修改 国家自然科学基金重点项目(90607003, 61131004)资助

第一作者简介:杜秀云(1976—),女, 博士研究生, 讲师,研究方向:3D IC 力热分析,区间分析。E-mail: duxiuyun@ sohu. com。

对具有区间参数的不确定性温度场问题进行分析,具有重要的理论探讨价值和工程意义。

鉴于以上考虑,现应用单元分析的区间有限元法和摄动理论,将含有区间参数的不确定性系统分解为确定性部分和不确定性部分,并建立相应的有限元数值分析模型,提出了具有区间参数的稳态热传导温度场不确定性分析的一种数值求解模式,并给出了相应的数值算例。计算结果表明,所提的求解模式能够对具有区间参数的稳态热传导问题进行有效的分析,并将分析结果与确定性分析结果进行对比。

1 热传导控制方程

稳态热传导问题的控制方程和边界条件可以表示为[7]

$$(k_{ij}T_{,j})_{,i} + Q = 0;x_i \in \Omega \tag{1}$$

$$T(t) = \bar{T}(t); \quad x_i, y_i \in \Gamma_1 \tag{2}$$

$$n_i(k_{ij}T_{,j}) = q + h(T - T_a) = q + hT - h_a; \quad x_i, y_i \in \Gamma_2 \tag{3}$$

式(3)中 k_{ij} 为导热系数,T 为表温度,Q 为源项,Ω、x_i 分别代表所论问题的域和坐标向量。下标 i、j 的大小表示问题的维数。$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 代表 Ω 的边界,$\bar{T}$、q、h 以及 T_a 分别表示给定第一类边界温度、第二类边界热流和第三类边界对流系数及环境温度函数。

在式(1)—式(3)所给出的控制方程和边界条件中,相关参数均为区间变量,具有不确定性的最一般情况,即导热系数 k_{ij}、热流密度 q、换热系数 h、环境温度 T_a、热源强度 Q、已知温度 $\bar{T}$ 和初始温度 T_0 均为区间参数,上述方程将变为含有区间参数的微分方程,可利用基于区间的数值方法进行求解。

2 有限元列式

上述方程中各参数均为区间向量,记为广义区间向量 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^T$,其中值分别为 $\varphi^c = (\varphi_1^c, \varphi_2^c, \cdots, \varphi_n^c)^T$,离差为 $\Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \cdots, \Delta\varphi_n)^T$。区间向量可分解表示为:$\varphi = \varphi^c + [-\Delta\varphi, \Delta\varphi] = \varphi^c + \Delta\varphi e_\Delta$,式中 $e_\Delta = [-1, 1]$。

对于含有区间参数的热传导问题,利用基于单元的区间有限元法,结合加权余量技术,区间有限元控制方程可写为[8]

$$K(\varphi)T = F(\varphi) \tag{4}$$

上式中各参量的表达式分别为

$$K(\varphi) = K(\varphi^c) + \Delta K;$$

$$F(\varphi) = F(\varphi^c) + \Delta F \tag{5}$$

上述式中 $K(\varphi^c)$、$F(\varphi^c)$ 是与中值对应的刚度阵和右端等效载荷矩阵,ΔK、ΔF 则分别为相对应的区间不确定性矩阵。

将式(5)中各区间参量表达式代入区间有限元方程式(4)中,忽略其中的高阶项,并取等式同侧的同阶项,可以得到下列方程组:

$$K(\varphi^c)T = F(\varphi^c) \tag{6}$$

$$K(\varphi^c)\Delta T = \Delta F - \Delta K T \tag{7}$$

在上述各式中,各矩阵的表达式分别为

$$K(\varphi^c) = \sum_1^N K_j(\varphi^c);$$

$$\Delta K = \sum_1^N \sum_1^n \frac{\partial K_j}{\partial \varphi_i} \Delta\varphi_i e_{ji} \tag{8}$$

$$F(\varphi^c) = F_{\bar{T}} + F_q + F_h + F_Q;$$

$$\Delta F = \sum_1^N \sum_1^n \frac{\partial F_j}{\partial \varphi_i} \Delta\varphi_i e_{ji} \tag{9}$$

由此可知,不确定控制方程(4)就可以分离为确定性部分式(6)和不确定部分式(7),进而计算求得相应的温度区间。

3 数值算例

考虑圆管横截面的热传导温度场区间分析问题,如图 1 所示,内径为 0.8 m,外径为 1.0 m,沿横截面厚度方向温度不变,外圆弧边界为第一类边界条件,内圆弧边界是第二类边界条件,现考虑各物性参数、边界条件和初始条件为区间变量时,圆管横截面的温度区间分布。

例 1　由外到里为同种材料,导热系数 $k = [18.0, 22.0]$ W/(m·℃),外表面第一类边界为 $\bar{T} = [0.9, 1.1]$℃,内表面的热流密度为 $q = [1\,800, 2\,200]$ W/m^2,结构节点温度场分布,结果如表 1 所示。

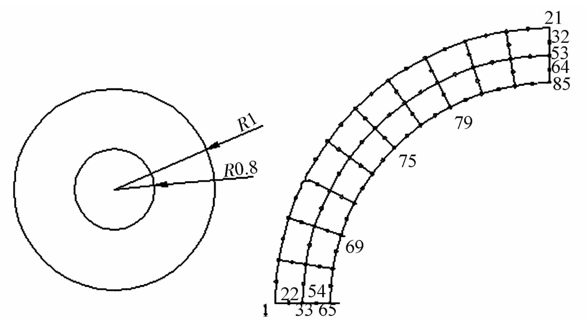

图 1　圆管横截面积有限元网格

表 1　节点温度的区间范围/℃

	测点	节点 69	节点 75	节点 79
温度值	下界	18.76	18.76	18.76
	中值	18.85	18.85	18.85
	上界	18.94	18.94	18.94
	确定分析	18.85	18.85	18.85

例 2　由外到里分为两种材料,导热系数为 $k = [18.0, 22.0; 17.0, 23.0]$ W/(m·℃),外表面第一类边界 $\bar{T} = [0.9, 1.1]$ ℃,内表面热流密度分为两个区,大小为 $q = [1\,800, 2\,200; 2\,700, 3\,300]$ W/m^2,结构温度场分布,结果如表 2 所示。

表 2　节点温度的区间范围/℃

	测点	节点 69	节点 75	节点 79
温度值	下界	15.80	19.30	22.51
	中值	15.89	19.39	22.60
	上界	15.98	19.48	22.69
	确定分析	15.89	19.39	22.60

由于对称关系可以从中选取 1/4 做有限元分析,共分为 20 个八节点等参单元。表 1 和表 2 分别给出了上述不同条件,69、75、79 号节点所对应的稳态温度区间分析值。

计算结果表明:

(1) 数值结果表明,所提的数值求解模式可以对具有区间参数的稳态热传导温度场区间响应进行有效的求解,具有可行性和有效性;

(2) 由计算结果可知,无论是均匀材料还是非均匀材料,以及边界条件变化时,区间分析结果仍与确定性分析的结果相一致,进一步证明了数值模型的有效性。

4 结论

针对稳态热传导问题,结合基于单元的区间有限元法和摄动理论,提出了对具有区间参数的稳态热传导温度场响应的数值求解模式,并对不确定性温度响应进行了分析。所给出的数值算例验证了所提的数值求解模式在求解具有区间参数的稳态热传导温度响应是可行和有效的,并且具有良好的计算效率。

参 考 文 献

1 苏静波,邵建国. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望. 力学进展,2005;35(3):338—344

2 梁震涛, 陈建军. 不确定结构动力区间分析方法研究. 应用力学学报, 2008;25(1): 46—50

3 邱志平,马利红,王晓军. 不确定非线性结构动力响应的区间分析方法. 力学学报,2006;38(5): 645—651

4 Impollonia N. Interval analysis of structures with uncertain-but-bounded axial stiffness. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011; 200(21—22): 1945—1962

5 李金平,陈建军,刘国梁. 具有区间参数的瞬态温度场数值分析. 电子科技大学学报,2009;38(3):463—466

6 EMERY A F. Solving stochastic heat transfer problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004;28(3):279—291

7 Lewis R. W. The finite element method in heat transfer analysis. UK: John Wiley & Sons,1996:11—29

8 陈塑寰,裴春艳. 不确定二阶振动控制系统动力响应的区间分析方法. 吉林大学学报(工学版),2008;38(1):94—98

Uncertainty Numerical Analysis of Heat Conduction Problem

DU Xiu-yun[1,2], TANG Zhen-an[1]

(School of Electronic Science and Technology, Dalian University of Technology[1], Dalian 116023, P. R. China;
School of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University[2], Dalian 116029, P. R. China)

[**Abstract**] A general numerical model is presented for heat conduction problem with interval finite element method based on the element and interval extension theory. The eight-point finite element model is given and the finite element model of the deterministic part and the uncertain part is established with interval finite element method. The temperature interal range is obtained through the numerical model. Satisfactory numerical validation is given, taking account of inhomogeneity and parameters distribution. Numerical results show that the numerical model is applied to solve the problem which shows its feasibility and effectiveness.

[**Key words**] uncertainty interval analysis heat conduction matrix perturbation