第 12 卷 第 24 期 2012 年 8 月
1671—1815(2012)24-0000-05

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 12 No. 24 Aug. 2012
ⓒ 2012 Sci. Tech. Engrg.

力学

稳态双极黏滞量子流体力学模型的正解的存在性

毛 磊[1] 张 燕[1] 寇冰煜[1] 刘 凤[2]

(解放军理工大学理学院[1],气象学院[2],南京 211101)

摘 要 研究一类带有特殊黏滞项的稳态双极流体力学模型正解的存在性。这个模型含有三阶量子修正项和二阶黏滞项。先将原方程组变形为常见的形式。得到原问题的等价问题利用先验估计和 Leray-Schauder 不动点定理。证明了无论是等熵还是等温条件下,对于所有的电流密度,此模型存在正解。

关键词 量子流体力学 黏滞 双极 不动点定理 正解

中图法分类号 O345; **文献标志码** A

随着半导体技术的发展,特别是超小半导体器件的应用,通常的漂移-扩散模型已不能很好的模拟载流子的运动,这就需要考虑更复杂的模型。现今常用的模型就是流体力学模型,对于有量子效应的超小半导体器件的描述,对应的模型还要结合量子技术。通常量子效应由微观方程模拟,如 Schrödinger 方程或 Wigner 方程。如果在 Wigner 方程中假设一个 Fokker-Planck 碰撞算子,用 Gardner 的矩量法在守恒方程中就产生了粘滞项,这样就得到了黏滞量子流体力学模型。

$$\partial_t n + divj = \gamma\Delta n;$$

$$\partial_t j + div\left(\frac{j\otimes j}{n}\right) - n\nabla V + T\nabla n - \frac{\varepsilon^2}{2}n\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{j}{\tau} + \gamma\Delta j;$$

$$\lambda^2\Delta V = n - C(x)。$$

其中, $n(x,t)$, $j(x,t)$, $V(x,t)$, $C(x)$ 分别表示电子浓度,电子电流密度,电位势和掺杂浓度, $T > 0$ 表示温度常数, $\varepsilon > 0$ 是 Planck 常数, $\tau > 0$ 表示动量松弛时间常数, $\lambda > 0$ 表示 Debye 长度, $\gamma > 0$ 表示黏滞常数。此模型大多在一维空间中讨论,要在高维空间中讨论张量积 $j \otimes j$ 和量子项 $\frac{\varepsilon^2}{2}n\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ 是很困难的。文献[1]中讨论了一维空间中双极等温模型的解的存在性。[2,3] 在二维和三维空间中讨论了古典流体力学方程组($\varepsilon = 0,\gamma = 0$)的次音速流。文献[4]中讨论了一维空间中的超音速流,在文献[5,6]中讨论的是二维空间中无量子项的黏滞流体力学方程组($\varepsilon = 0,\gamma > 0$)。当 $\varepsilon > 0,\gamma = 0$ 时,我们得到的是半导体模型中的量子流体力学方程组,可用来分析量子半导体器件中的电子流,如振荡二极管[7],关于子流体力学方程组的导出及证明在[7—9]均有讨论。

文章考虑的是在一类特别的黏滞项下讨论对于所有的电流密度,无论等温还是等熵情形,对应的双极黏滞量子流体力学模型都存在一个正解。

一维空间中带黏滞项 $B = n(\beta(n))_{xx}$ 的稳态双极量子流体力学模型:

$$j_x = 0, x \in \Omega \tag{1}$$

$$\left(\frac{j^2}{n} + TP_1(n)\right)_x - nV_x - \varepsilon^2 n\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_x = -\frac{j}{\tau(x)} - \gamma n(\beta(n))_{xx}; x \in \Omega \tag{2}$$

2012 年 5 月 11 日收到

第一作者简介:毛 磊(1981—),女,山东青岛人,讲师,硕士,研究方向:偏微分方程。E-mail:maolei1981@126.com。

$$h_x = 0;x \in \Omega \tag{3}$$

$$\left(\frac{h^2}{p} + TP_1(p)\right)_x + pV_x - \varepsilon^2 p\left(\frac{(\sqrt{p})_{xx}}{\sqrt{p}}\right)_x = - \frac{j}{\tau(x)} - \gamma p(\beta(p))_{xx};x \in \Omega \tag{4}$$

$$\lambda^2 V_{xx} = n - p - C(x);x \in \Omega \tag{5}$$

式(5)中 $\Omega = (0,1)$,$j(x,t)$,$h(x,t)$ 分别表示空穴浓度、空穴电流密度,其他记号同上,且 $j,h > 0$。假设边界条件

$$n(0) = n_0,n(1) = n_1,p(0) = p_0,V(0) = V_0, V_x(0) = - E_0 \tag{6}$$

$$\varepsilon^2 \frac{(\sqrt{n})_{xx}(0)}{\sqrt{n_0}} - \gamma\beta'(n_0)n_x(0) = \frac{j^2}{2n_0^2} + TH(n_0) - V_0 + K \tag{7}$$

$$\varepsilon^2 \frac{(\sqrt{p})_{xx}(0)}{\sqrt{p_0}} - \gamma\beta'(p_0)p_x(0) = \frac{h^2}{2p_0^2} + TH(p_0) + V_0 + K \tag{8}$$

这里 $H(s)$ 为焓函数,$H'(s) = P'_1(s)/s,s > 0$ 且 $H(1) = 0,K > 0$ 为常数在下文给出(见式(14)),相应地,等温时 $H(s) = \ln s(s > 0)$,等熵时 $H(s) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}(s^\alpha - 1)(s > 0),\alpha > 1$。

注 1 由于式(2)、式(4)为三阶方程,需要关于 n,p 的三个边界条件。我们只在点 $x = 0$ 刻画了电势 V,而没有在 $x = 1$ 处给出描述,是因为可由微分方程组的解来计算外加电势 $V(1) - V(0)$。条件式(7)和式(8)可作为量子 Fermi 势的一个边界条件(或量子[10])。

本章的主要假设之一就是黏滞项的选取:

$$\beta(n) = - \frac{1}{r - 1}\frac{1}{n^{(r-1)/2}};r > 4 \tag{9}$$

在上述假设下,对任意的电流密度,模型式(1)—式(8)都存在一个正解。

1 方程变形及主要假设与结论

由式(1),式(3)知相对于 x,j,h 为常数,由式(2)得

$$n\left[\frac{j^2}{2n^2} + TH(n) - V - \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}} + j\int_0^x \frac{ds}{\tau n} + \gamma\beta(n)_x\right]_x = 0。$$

上式两边同除以 $n > 0$,并在 $(0,x)$ 上积分,得

$$\frac{j^2}{2n^2} + TH(n) - V - \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}} + j\int_0^x \frac{ds}{\tau n} + \gamma\beta(n)_x = - K。$$

其中 K 是满足式(7)、式(8)的常数。

同理,由式(4)和式(8)可得

$$\frac{h^2}{2p^2} + TH(p) + V - \varepsilon^2 \frac{(\sqrt{p})_{xx}}{\sqrt{p}} + h\int_0^x \frac{ds}{\tau p} + \gamma\beta(p)_x = - K。$$

令 $\omega = \sqrt{n},u = \sqrt{p}$,则式(1)—式(8)可变为

$$\varepsilon^2 \omega_{xx} = \frac{j^2}{2\omega^3} + T\omega H(\omega^2) - V\omega + K\omega + \mathrm{j}\omega\int_0^x \frac{ds}{\tau\omega^2} + \gamma \frac{\omega_x}{\omega^r} \tag{10}$$

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \frac{h^2}{2u^3} + TuH(u^2) + Vu + Ku + hu\int_0^x \frac{ds}{\tau u^2} + \gamma \frac{u_x}{u^r} \tag{11}$$

$$\lambda^2 V_{xx} = \omega^2 - u^2 - C(x);$$

$$\lambda^2 V_{xx} = \omega^2 - u^2 - C(x) \tag{12}$$

边界条件

$$\omega(0) = \omega_0,\omega(1) = \omega_1,u(0) = u_0,u(1) = u_1;$$

$$V(0) = V_0,V_x(0) = - E_0 \tag{13}$$

式(13)中

$\omega_0 = \sqrt{n_0},\omega_1 = \sqrt{n_1},u_0 = \sqrt{p_0},u_1 = \sqrt{p_1}$。常数 K 的选取如下:

$$K \sim V_0 + \max(- E_0,0) + \lambda^{-2}M \tag{14}$$

$$M \sim \max(\omega_0,\omega_1,u_0,u_1,M_0) \tag{15}$$

M_0 满足 $H(M_0) \geqslant 0$,常数 K 的给定使得 $- V(x) + K \geqslant 0,V(x) + K \geqslant 0$ 成立。

需要以下假设:

(A_1) $H(s) \in C^1(0, + \infty)$。

$P'_1(H'(s) = P'_1(s)/s,s > 0)$ 是非减的,并且 H 满足

$$\lim_{s\to+\infty} H(s) > 0,\lim_{s\to0^+}H(s) < 0,\lim_{s\to0^+}\sqrt{s}H(s) > - \infty \tag{16}$$

(A_2) $C \in L^2(\Omega)$;在 Ω 中,

$C \geqslant 0, \tau \in L^{+\infty}(\Omega), \tau(x) \geqslant \tau_0 > 0$。

$(A_3) j, h, \omega_0, \omega_1, u_0, u_1, \varepsilon, \lambda, T, \gamma > 0; V_0, E_0 \in R$。

下面给出主要定理。

定理 设(A_1)—(A_3)成立, T足够大,则对任意的$j,h > 0$, 方程组式(10)—式(13)存在一个解$(\omega,u,V) \in (C^2(\overline{\Omega}))^3$, 满足

$0 < m(\gamma) \leqslant \omega(x), u(x) \leqslant M$

对所有的$x \in \Omega$成立。

注2:常数$m(\gamma)$定义如下:

$m(\gamma) := \min(\omega_0, \omega_1, u_0, u_1, m_1, m_2)$,

其中　$H(4m_1^2) \leqslant 0$,

$$m_2 \leqslant \left(\frac{1}{2^{r+1}} \frac{\gamma}{j^2/2 + j/\tau_0 + \max(0, K-k, K+k)}\right)^{1/r-4};$$

$$k = V_0 - \max(E_0, 0) - \lambda^{-2}(\|C\|_{L^1(\Omega)} + M^2)。$$

常数M在式(15)中给定。

2　先验估计及定理的证明

为了证明定理,定义函数

$$\varphi(x) = \delta(2-x), x \in [0,1], 0 < \delta < \min\left(1, \frac{M}{2}\right) \tag{17}$$

考虑截断问题

$$\varepsilon^2 \omega_{xx} = \frac{j^2 \omega}{2t_\delta(\omega)^4} + T\omega H(\omega^2) - V\omega + K\omega + \mathrm{j}\omega \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(\omega)^2} + \gamma \frac{(t_\varphi(\omega_M))_x \omega}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}} \tag{18}$$

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \frac{h^2 u}{2t_\delta(u)^4} + TuH(u^2) + Vu + Ku + hu\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(u)^2} + \gamma \frac{(t_\varphi(u_M))_x u}{t_\varphi(u_M)^{r+1}} \tag{19}$$

$$\lambda^2 V_{xx} = \omega_M^2 - u_M^2 - C(x) \tag{20}$$

其中

$t_\delta(\omega) = \max(\delta, \omega)$;

$t_\delta(\omega_M) = \max(\varphi(\cdot), \min(M, \omega(\cdot)))$。

我们可以证明,对于任意的$j,h > 0$,当T足够大时,式(18)—式(20),式(13)的解存在。

命题 设(A_1)—(A_3)成立, T足够大,则对任意的$j,h > 0$, 式(18)—式(20),式 (13)存在解 $(\omega, u, V) \in (H^2(\Omega))^3$,且在Ω中有

$0 \leqslant \omega(x), u(x) \leqslant M$。

为了证明命题,我们考虑逼近问题

$$\varepsilon^2 \omega_{xx} = \frac{j^2 \omega^+}{2t_\delta(\omega)^4} + T\omega^+ H(\omega^2) - V\omega^+ + K\omega^+ + \mathrm{j}\omega^+ \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(\omega)^2} + \gamma \frac{(t_\varphi(\omega_M))_x \omega^+}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}} \tag{21}$$

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \frac{h^2 u^+}{2t_\delta(u)^4} + Tu^+ H(u^2) + Vu^+ + Ku^+ + hu^+ \int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(u)^2} + \gamma \frac{(t_\varphi(u_M))_x u^+}{t_\varphi(u_M)^{r+1}} \tag{22}$$

$$\lambda^2 V_{xx} = \omega_M^2 - u_M^2 - C(x) \tag{23}$$

其中

$\omega^+ = \max(0, \omega), \omega_M = \min(M, \omega)$。

设(ω, u, V)是式(21)—式(23),式(13)的一个弱解,则我们有下面的先验估计:

引理1　(L^∞ 估计)。对所有的$x \in \Omega$均有下列不等式成立:

$$0 \leqslant \omega(x), u(x) \leqslant M, k \leqslant V(x) \leqslant K \tag{24}$$

式(24)中

$k = V_0 - \max(E_0, 0) - \lambda^{-2}(M^2 + \|C\| L^1(\Omega))$。

证明　式(23)两边在$(0,x)$上积分,并利用式(13)得

$$V_x = \int_0^x V_{xx} + V_{0x} = \int_0^x V_{xx} - E_0。$$

将上式两边再在$(0,x)$上积分,得

$$V(x) = V_0 - E_{0x} + \lambda^{-2} \int_0^x \int_0^y (\omega(z)_M^2 - u(z)_M^2 - C(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}y \tag{25}$$

这里$x \in \Omega$, 由 AA (25)得

$V_0 - \max(E_0, 0) - \lambda^{-2}(M^2 + \|C\|_{L^1(\Omega)}) \leqslant V(x) \leqslant$

$V_0 + \max(-E_0, 0) + \lambda^{-2} M^2$。

这就证明了式(24)中的第二个不等式。

用$\omega^- = \min(0, \omega)$作为式(21)的试验函数,得

$$-\varepsilon^2 \int_0^1 (\omega_x^-)^2 \mathrm{d}x = 0。$$

从而在Ω中有$\omega \geqslant 0$。

同理,用$u^- = \min(0, u)$作为式(22)的试验函

数可得 $u \geqslant 0$。

则式(21)—式(23)变为

$$\varepsilon^2\omega_{xx} = \frac{j^2\omega}{2t_\delta(\omega)^4} + T\omega H(\omega^2) - V\omega + K\omega + \mathrm{j}\omega\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(\omega)^2} + \gamma\frac{(t_\varphi(\omega_M))_x\omega}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}} \tag{26}$$

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \frac{h^2 u}{2t_\delta(u)^4} + TuH(u^2) + Vu + Ku + hu\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(u)^2} + \gamma\frac{(t_\varphi(u_M))_x u}{t_\varphi(u_M)^{r+1}} \tag{27}$$

$$\lambda^2 V_{xx} = \omega_M^2 - u_M^2 - C(x) \tag{28}$$

最后,用 $(\omega - M)^+ = \max(0,\omega - M)$ 作为式(26)的试验函数,得

$$\varepsilon^2\int_\Omega((\omega - M)_x^+)^2\mathrm{d}x = \int_\Omega(\omega - M)^+\omega[\frac{-j^2}{2t_\delta(\omega)^4} - TH(\omega^2) + (V-K) - \mathrm{j}\int_0^x\frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(\omega)^2}]\mathrm{d}x - \gamma\int_\Omega\frac{(t_\varphi(\omega_M))_x\omega(\omega - M)^+}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}}\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\int_\Omega(\omega - M)^+\omega\left[\frac{-j^2}{2t_\delta(\omega)^4} - TH(M^2) + (V-K) - j\int_0^x\frac{ds}{\tau t_\delta(\omega)^2}\right]\mathrm{d}x - \gamma\int_\Omega\frac{(t_\varphi(\omega_M))_x\omega(\omega - M)^+}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}}\mathrm{d}x。$$

由 H 的单调性和 M 的定义,我们有 $H(M^2) \geqslant H(M_0^2) \geqslant 0$。再由关于 K 的假设 $-V+K \geqslant 0$。且 T 足够大,因此有

$$\varepsilon^2\int_\Omega((\omega - M)_x^+)^2\mathrm{d}x \leqslant 0。$$

所以,在 Ω 上 $\omega \leqslant M$。

同理,用 $(u - M)^+ = \max(0,u - M)$ 作为式(27)的试验函数得,在 Ω 上 $u \leqslant M$。

引理 2 (H^1 估计)存在仅依赖于 δ,ε 和 M 的常数 $c_1,c_2,c_3 > 0$, 使得

$$\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1,\ \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2,\ \|V\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3。$$

证明 由式(23)和式(13)可得

$$V_x(x) = -E_0 + \lambda^{-2}\int_0^x(\omega(y)_M^2 - u(y)_M^2 - C(y))\mathrm{d}y,$$

再结合引理 1 可得第三个结论。用 $\omega - \omega_D$ 作为式(26)的试验函数

$$\varepsilon^2\int_\Omega\omega_x^2\mathrm{d}x = \varepsilon^2\int_\Omega\omega_x\omega_{Dx}\mathrm{d}x - \gamma\int_\Omega\frac{(t_\varphi(\omega_M))_x\omega(\omega - \omega_D)}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}}\mathrm{d}x - \int_\Omega(\omega - \omega_D)\omega\left[\frac{j^2}{2t_\delta(\omega)^4} + TH(\omega^2) - (V-K) + j\int_0^x\frac{\mathrm{d}s}{\tau t_\delta(\omega)^2}\right]\mathrm{d}x。 \tag{29}$$

这里

$$\omega_D = (1-x)\omega_0 + x\omega_1。$$

将式(29)右边的前两个积分用 Young 不等式,最后一个积分用引理 1,得

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega\omega_x^2\mathrm{d}x \leqslant c。$$

同理,用 $u - u_D$ 作为式(27)的试验函数可得

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega u_x^2\mathrm{d}x \leqslant c。$$

引理 3 (H^2 估计)存在不依赖于 ω,u 和 M 的常数 $c_4,c_5,c_6 > 0$, 使得

$$\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_4,\ \|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_5,\ \|V\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_6。$$

证明 由式(26)—式(28),引理 2 及一维空间中 $H^1(\Omega)$ 嵌入到 $L^\infty(\Omega)$ 可得。

下面来证明命题,这里要用到 Leray-Schauder 不动点定理[11]。

对于任意的 $a,b \in H^1(\Omega)$,设 $V \in H^2(\Omega)$ 是问题

$$\lambda^2 V_{xx} = a_M^2 - b_M^2 - C(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上}, V(0) = V_0, V_x(0) = -E_0,$$

的唯一解。设 $\omega,u \in H^2(\Omega)$ 分别是

$$\varepsilon^2\omega_{xx} = \sigma\left[\frac{j^2a^+}{2t_\delta(a)^4} + Ta^+H(a^2) - Va^+ + Ka^+ + ja^+\int_0^x\frac{ds}{\tau t_\delta(a)^2}\right] + \sigma\gamma\frac{(t_\varphi(a_M))_x a^+}{t_\varphi(a_M)^{r+1}}。$$

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \sigma\left[\frac{j^2b^+}{2t_\delta(b)^4} + Tb^+H(b^2) + Vb^+ + Kb^+ + jb^+\int_0^x\frac{ds}{\tau t_\delta(b)^2}\right] + \sigma\gamma\frac{(t_\varphi(b_M))_x b^+}{t_\varphi(b_M)^{r+1}}。$$

$$\omega(0) = \sigma\omega_0, \omega(1) = \sigma\omega_1, u(0) = \sigma u_0, u(1) = \sigma u_1,$$

的唯一解。这里 $\sigma\in[0,1]$。

下面可以定义不动点算子 $\tau:H^1(\Omega)\times[0,1]\to H^1(\Omega)$,$\tau(a,b,\sigma)\to(\omega,u)$。对所有的 $a,b\in H^1(\Omega)$,有 $\tau(a,b,0)\to(0,0)$。类似于引理 1—3 的证明,我们可证明存在一个常数 $c>0$,使得对所有满足 $\tau(\omega,u,\sigma)=(\omega,u)$ 的 $\omega\in H^1(\Omega)$,$u\in H^1(\Omega)$ 成立

$$\|\omega\|_{H^2(\Omega)}\leqslant c,\ \|u\|_{H^2(\Omega)}\leqslant c。$$

由 $H^2(\Omega)$ 紧嵌入到 $\mathrm{H}^1(\Omega)$ 得 τ 是紧的。易证 τ 是连续的,因此,由 Leray-Schauder 不动点定理可得解的存在性。

对于定理的证明,我们只需证明 ω,u 是严格正的。

用 $(\omega-\varphi)^-\in H_0^1(\Omega)$ 作为式(26)的试验函数,得

$$\varepsilon^2\int_\Omega((\omega-\varphi)_x^-)^2\mathrm{d}x=\int_\Omega(-(\omega-\varphi)^-)\omega\Big[\frac{j^2}{2t_\delta(\omega)^4}+TH(\omega^2)-V+K+j\int_0^x\frac{ds}{\tau t_\delta(\omega)^2}+\gamma\int_\Omega\frac{(t_\varphi(\omega_M))_x}{t_\varphi(\omega_M)^{r+1}}\Big]\mathrm{d}x \tag{30}$$

这里 $(\omega-\varphi)^-=\min(0,\omega-\varphi)$。

由 φ 的定义式(17)知

$$\delta\leqslant\varphi(x)\leqslant2\delta,\varphi(x)_x=-\delta,$$

当 $\omega<\varphi$ 时,

$(\omega-\varphi)^-\neq0,H(\omega^2)<H(\varphi^2),t_\varphi(\omega)=\max(\varphi,\omega)=\varphi$。所以由式(30)得

$$\varepsilon^2\int_\Omega((\omega-\varphi)_x^-)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega(-(\omega-\varphi)^-)\omega\Big[\frac{j^2}{2\delta^4}+TH(\varphi^2)-k+K+\frac{j}{\tau_0\delta^2}+\gamma\frac{\varphi_x}{\varphi^{r+1}}\Big]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega(-(\omega-\varphi)^-)\omega\Big[\frac{j^2}{2\delta^4}+TH(\varphi^2)-k+K+\frac{j}{\tau_0\delta^2}-\gamma\frac{\delta}{(2\delta)^{r+1}}\Big]\mathrm{d}x。$$

$$\leqslant\int_\Omega(-(\omega-\varphi)^-)\omega\Big[\frac{j^2}{2\delta^4}+TH(4\delta^2)-k+K+\frac{j}{\tau_0\delta^2}-\frac{\gamma}{2^{r+1}\delta^r}\Big]\mathrm{d}x。$$

对足够小的 $\delta>0$,可保证不等号右边括号内非正,这样即可得 $\omega(x)\geqslant\varphi(x)\geqslant\delta>0$,即我们只要取 $m(\gamma)=\delta$ 即可。

现在取 $\delta\in(0,1)$ 使得

$$\delta\leqslant\Big(\frac{1}{2^{r+1}}\frac{\gamma}{j^2/2+j/\tau_0+\max(0,K-k,K+k)}\Big)^{1/(r-4)},$$ 及 $H(4\delta^2)\leqslant0$。

因为 $r>4$,且 $\delta\leqslant1$,所以

$$\frac{j^2}{2\delta^4}+TH(4\delta^2)-k+K+\frac{j}{\tau_0\delta^2}-\frac{\gamma}{2^{r+1}\delta^r}\leqslant\frac{1}{\delta^4}\Big(\frac{j^2}{2}+\frac{j}{\tau_0}+\max(0,K-k)-\frac{\gamma}{2^{r+1}\delta^{r-4}}\Big)\leqslant0。$$

同理,取 $(u-\varphi)^-$ 作为式(27)的试验函数可得 $u(x)\geqslant\varphi(x)\geqslant\delta>0$。

综上,定理得证。

参　考　文　献

1 毛　磊,管　平. 一维双极粘滞量子流体力学模型解的存在性. 东南大学学报(自然科学版),2007;37(6):1132—1136

2 P. Degond,P. Markowich. A steady state potential flow model for semiconductors ,Ann. Mat. Pura Appl. ,1993;165:87—98

3 Markowich P. On steady Euler-Poisson models for semiconductors,Z Angew Math Physik, 1991;42(3):385—407

4 Gamba I M. Stationary transonic solutions of a one-dimensional hydrodynamic model for semiconductors,Comm P D E,1992;17(3&4):225—267

5 Gamba I M. Sharp uniform bounds for steady potential fluid-Poisson systems,Proc Roy Soc Edinb A,1997;127:479—516

6 Gamba I M,Morawetz C. A viscous approximation for a 2D steady semiconductor or transonic gas dynamic flow:Existence theorem for potential flow,Comm Pure Appl Math,1996;49:999—1049

7 Gardner C. The quantum hydrodynamic model for semiconductors device, SIMA J Appl Math,1994;54(2):409—427

8 Cushing J T,Fine A,Goldstein S. Bohmian mechanics and quantum theory: an appraisal. Kluger,Dordrecht, 1996

9 Gasser I,Markowich P,Ringhofer C. Closure conditions for classical and quantum moment hierarchies in the small temperature limit,Transp Theory Stat Phys,1996;25(3):409—423

10 Jüngel A. A steady-state quantum Euler-Poisson system for potential flow. Comn Math Phys,1998;194(2):463—479

11 Gilbarg D,Trudinger N. Elliptic partial defferential equations of second order. Springer,Berlin,1983

12 Gualdani M,Jüngel A. Analysis of the viscous quantum hydrodynamic equations for semiconductors. J Appl Math,2004;15(5):577—595.

13 Gualdani M,Jüngel A. Exponential decay in time of solutions of the vis-

cous quantum hydrodynamic equations. Applied Mathematic Letters, 2003;16(8):1273—1278

The Existence of Positive Solution of the Steady-state Bipolar Viscous Quantum Hydrodynamic Model

MAO Lei[1], ZHANG Yan[1], KOU Bing-yu[1], LIU feng[2]

(Institute of Sciences[1], Institute of Meteorology[2], PLA Univ. of Sci. &Tech., Nanjing, 211101, P. R. China)

[**Abstract**] The weak solution of the steady-state bipolar quantum hydrodynamic equations with special viscous terms is studied. The model equations contain a third-order quantum correction term and second-order viscous term which are derived from a Wigner-Fokker-Planck model. By using prior estimates and Leray-Schauder fixed point theorem, it is shown that, in the case of isothermal or isentropic, the equations have a positive solution for all current density.

[**Key words**] quantum hydrodynamics viscosity bipolar fixed point theorem positive solution