

基于中心差分卡尔曼滤波的航天器 视觉相对导航算法研究

赵凯 岳晓奎 吴侃之

(西北工业大学航天学院,西安 710072)

摘要 在航天器视觉相对导航过程中,量测方程的非线性特性会影响航天器相对位姿的估计精度。分析了扩展卡尔曼滤波方法(EKF)将非线性模型线性化时存在的缺点,研究了中心差分卡尔曼滤波方法(CDKF),提出用中心差分卡尔曼滤波方法来解决视觉导航中两航天器的相对位姿估计问题,并给出了EKF与CDKF的仿真结果。仿真结果表明在相同条件下,CDKF算法比EKF具有更高的精度和稳定性,该方法能够在航天器视觉相对导航中应用。

关键词 中心差分卡尔曼滤波 视觉导航 相对位姿

中图分类号 V448.224; **文献标志码** A

航天器的相对导航是实现航天器交会、伴飞和编队飞行的前提,将直接影响制导和控制精度^[1]。而基于CCD光学测量的视觉导航具有体积小、功耗小等特点,从而在空间交会对接的最后阶段得到广泛应用^[2]。视觉导航中的观测方程是非线性的,对于非线性系统的滤波,扩展卡尔曼滤波(EKF)应用最为广泛。EKF通过对非线性模型进行泰勒展开来建立线性化的卡尔曼滤波模型,这样就产生了高阶截断误差。当高阶截断误差不能忽略时,EKF会导致很大的线性化误差,从而使得滤波精度降低甚至发散。而中心差分卡尔曼滤波(CDKF)则是独立于非线性模型,采用Sterling内插公式对非线性函数进行多项式逼近,避免了线性化过程带来的截断误差,提高了滤波的精度和稳定性。本文主要研究CDKF算法,提出将CDKF算法应用于航天器视觉相对导航中,并进行了仿真验证。仿真结果显示,该方法滤波精度能够满足视觉相对导航的要求。

1 滤波模型

1.1 相对轨道运动的状态方程

C-W方程也叫Hill方程,它是在研究航天器交会对接的问题时提出的航天器近距离相对运动

的线性化方程^[3]。假设小卫星和目标航天器在地球中心引力场中运动,且目标航天器为圆形轨道,两航天器间的距离远远小于轨道半径,可以在目标航天器的轨道坐标系下建立相对运动方程。

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + n^2y = 0 \\ \ddot{z} + 2n\dot{x} - 3n^2z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

方程(1)中 $n = \sqrt{\frac{\mu}{a_c^3}}$ 为平均轨道角速度,为常量。根据式(1)可得关于两航天器相对位置和速度状态量的线性方程式(2)。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \\ 0 & -\Omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\Omega^2 & -2\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

式(2)中 $\Omega = n k$,为目标航天器的轨道角速度。 X, Y, Z, V_x, V_y, V_z 为目标航天器相对于主动航天器在目标航天器轨道坐标系下的坐标,并定义状态量 $X_1 = [X \ Y \ Z \ V_x \ V_y]^T, f_x, f_y, f_z$ 为摄动和推力加速度。为了便于研究,本文假设 $f=0$,当 $f \neq 0$ 时,可以将其作为一个控制输入来处理。

1.2 相对姿态运动的状态方程

描述姿态的参数有欧拉角、四元数和修正的罗

2011年11月29日收到

第一作者简介:赵凯(1985—),男,天津人,硕士研究生,研究方向:航天器视觉导航。E-mail:kelvinzk@yahoo.com.cn。

德里格斯参数 (Modified Rodrigues Parameters, MRP), 由于欧拉角涉及到大量三角运算, 不满足实时性高的场合; 四元数不是姿态描述的最小实现。由于存在一个约束条件而难以应用在滤波过程中, 而 MRP 仅利用三参数描述姿态运动, 且不存在大量三角运算, 所以采用其作为姿态描述参数^[4]。

1840 年法国数学家 Rodrigues 根据刚体绕定点转动提出 Rodrigues 参数。设 $n = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ 为 Euler 轴上的单位矢量, θ 为 n 的旋转角, 定义 Rodrigues 参数为:

$$g = \tan(\theta/2) n \quad (3)$$

Rodrigues 参数也可以由四元数 $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ 描述为:

$$g_i = q_i/q_4; \quad i=1,2,3 \quad (4)$$

设目标航天器相对摄像机的角速度在摄像机坐标系下是 ω , 则相对姿态运动方程式(5)。

$$\dot{g} = \frac{1}{2} [\omega + g \times \omega + (g \cdot \omega) g] \quad (5)$$

当 $\theta \rightarrow \pi$ 时, g 的模 $g \rightarrow \infty$, 此时不能进行姿态解算, 为了避免奇异性问题, 可以利用 Shuster 提出的序贯旋转法 (Method of Sequential Rotations, MSR)。其基本思想是人为地将参考坐标系绕其坐标轴旋转 π , 这样本体相对于参考系的姿态将发生变化, 于是绕有限转动轴的旋转角 θ 也发生改变。若旋转前 θ 接近 π , 则旋转后 θ 即可远离 π 。下面在 MSR 方法的基础之上定义 Rodrigues 参数。

设航天器本体相对于参考系 $r^{(0)}$ 的 Rodrigues 参数为 $g^{(0)}$, 使参考系绕其第 i ($i=1,2,3$) 轴转动 π 得到的坐标系记为 $r^{(i)}$, 本体相对于参考系 $r^{(i)}$ 的 Rodrigues 参数记为 $g^{(i)}$, 则有 $g^{(i)}$ 和四元数关系如式(6)。

$$\begin{cases} g^{(0)} = [q_1/q_4 & q_2/q_4 & q_3/q_4]^T \\ g^{(1)} = [-q_4/q_1 & q_3/q_1 & -q_2/q_1]^T \\ g^{(2)} = [-q_3/q_2 & -q_4/q_4 & q_1/q_2]^T \\ g^{(3)} = [q_2/q_3 & -q_1/q_3 & -q_4/q_3]^T \end{cases} \quad (6)$$

已知 $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$; $q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4$ 不会同时为零, 所以 $g^{(0)}$ 、 $g^{(1)}$ 、 $g^{(2)}$ 、 $g^{(3)}$ 的模不会同时无穷大, 可以避免奇异现象产生。

Rodrigues 参数 $g^{(i)}$ ($i=0,1,2,3$) 与角速度 ω 仍满足式(5), 即:

$$\dot{g}^{(i)} = \frac{1}{2} \{ \omega + g^{(i)} \times \omega + (g^{(i)} \cdot \omega) g^{(i)} \} \quad (7)$$

并定义 $X_2 = [g_1^{(i)} \ g_2^{(i)} \ g_3^{(i)}]^T$ 。

1.3 航天器相对运动的状态方程

状态方程由相对轨道和相对姿态的运动方程构成, 状态变量为: $X = [X_1 \ X_2]^T$, 式(2)和式(7)就构成了航天器相对运动状态方程。

1.4 视觉导航观测方程

视觉导航的基础是摄像机模型, 它反映的是三维空间目标点到二维图像点的几何投影关系, 在本文中采用线性摄像机模型。

假设目标航天器的特征点 P 在目标本体体系下的坐标表示为 (X_T, Y_T, Z_T) , 在摄像机坐标系下的坐标表示为 (X_C, Y_C, Z_C) , 目标航天器相对于主动航天器的位置在摄像机坐标系下的坐标表示为 (t_x, t_y, t_z) , 则有:

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)中 R 为目标本体相对于摄像机坐标系的方向余弦矩阵。将 R 用 Rodrigues 参数表示, 可得:

$$\begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{bmatrix} = R(g^{(i)}) \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ Z_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

设目标航天器特征点 P 的像点 p 在像平面坐标系中的坐标为 (x, y) , 则有:

$$\begin{cases} x = \frac{-fX_C}{Z_C} \\ y = \frac{-fY_C}{Z_C} \end{cases} \quad (10)$$

式(10)中 f 为摄像机焦距。式(9)和式(10)就构成了基于 Rodrigues 参数的视觉导航观测方程。

2 基于 CDKF 的相对位姿估计

2.1 中心差分变换

中心差分变换是 CDKF 滤波器的基础, 它采用 Sterling 差值公式代替泰勒级数展开式中的一阶、二阶导数, 用多项式逼近非线性方程导数, 从而能够避免求导运算^[5,6]。

x 为一随机矢量, $y=f(x)$ 为关于 x 的非线性方

程, $f(x)$ 围绕点 $x = \bar{x}$ 的二阶泰勒展开式为:

$$y = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) \frac{df(\bar{x})}{dx} + \frac{1}{2!} (x - \bar{x})^2 \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2} \quad (11)$$

利用 Sterling 差值公式将非线性方程按中心差分形式展开, 可以近似式(11)中的导数项, 得到非线性方程的另外一种近似表达式(12)。

$$y \approx f(\bar{x}) + \tilde{D}_{\Delta x} f + \frac{1}{2!} \tilde{D}_{\Delta x}^2 f \quad (12)$$

式(12)中, $\tilde{D}_{\Delta x}$ 、 $\tilde{D}_{\Delta x}^2$ 分别为一阶、二阶中心差分算子, 并定义如下:

$$\tilde{D}_{\Delta x} f = \frac{1}{h} \left[\sum_{i=1}^L \Delta x_i \mu_i \delta_i \right] f(\bar{x}) \quad (13)$$

$$\tilde{D}_{\Delta x}^2 f = \frac{1}{h^2} \left[\sum_{i=1}^L \Delta x_i^2 \delta_i^2 + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1, k \neq j}^L \Delta x_j \Delta x_k (\mu_j \delta_j) (\mu_k \delta_k) \right] f(\bar{x}) \quad (14)$$

式中, $\Delta x_i = (x - \bar{x})_i$, L 为随机变量 x 的维数, $\mu_i, \delta_i, \delta_i^2$ 分别为:

$$\mu_i f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \left[f\left(\bar{x} + \frac{h}{2} e_i\right) + f\left(\bar{x} - \frac{h}{2} e_i\right) \right] \quad (15)$$

$$\delta_i f(\bar{x}) = f\left(\bar{x} + \frac{h}{2} e_i\right) - f\left(\bar{x} - \frac{h}{2} e_i\right) \quad (16)$$

$$\delta_i^2 f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \left[f\left(\bar{x} + \frac{h}{2} e_i\right) + f\left(\bar{x} - \frac{h}{2} e_i\right) - 2f(\bar{x}) \right] \quad (17)$$

式中 e_i 为 L 维欧氏空间中的自然基底矢量, 即第 i 个元素为 1, 其余元素为 0 的单位向量。

为了用 x 表示均值 $\bar{y}$ 、协方差 P_{xy} , 需要去除向量 x 各分量间的相关性, 对 x 作随机解耦变换 $z = S_x^{-1} x$, 并定义关于变量 z 的函数 $f(z)$ 满足:

$$f(z) \triangleq f(S_x z) = f(x) \quad (18)$$

式(18)中变换阵 S_x 是协方差阵 P_x 的 Cholesky 展开。

$$P_x = S_x S_x^T \quad (19)$$

则式(12)可表示为:

$$y \approx f(\bar{z}) + \frac{1}{h} \left[\sum_{i=1}^L \Delta z_i \mu_i \delta_i \right] f(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2} \left[\sum_{i=1}^L \Delta z_i^2 \delta_i^2 + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1, k \neq j}^L \Delta z_j \Delta z_k (\mu_j \delta_j) (\mu_k \delta_k) \right] f(\bar{z}) \quad (20)$$

经过随机解耦变换, 存在关系 $E[(z - E[z])^T] = I$, 由 $z = S_x^{-1} x$ 和(18)式可知:

$$f(\bar{z} \pm h e_i) = f(S_x(\bar{z} \pm h e_i)) = f(S_x \bar{z} \pm h S_x e_i) = f(\bar{x} \pm h S_{x_i}) \quad (21)$$

式(21)中 S_{x_i} 为状态协方差矩阵 Cholesky 分解后的第 i 列, 从而容易求得均值 $\bar{y}$, 方差 P_x 和协方差 P_{xy} :

$$\bar{y} = \frac{h^2 - 1}{h^2} f(\bar{x}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{i=1}^L \left[f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i}) \right] \quad (22)$$

$$P_y = \frac{1}{4h^2} \sum_{i=1}^L \left[f(\bar{x} + h S_{x_i}) - f(\bar{x} - h S_{x_i}) \right] \left[f(\bar{x} + h S_{x_i}) - f(\bar{x} - h S_{x_i}) \right]^T + \frac{h^2 - 1}{4h^2} \sum_{i=1}^L \left[f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i}) - 2f(\bar{x}) \right] \left[f(\bar{x} + h S_{x_i}) + f(\bar{x} - h S_{x_i}) - 2f(\bar{x}) \right]^T \quad (23)$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^L S_{x_i} \left[f(\bar{x} + h S_{x_i}) - f(\bar{x} - h S_{x_i}) \right]^T \quad (24)$$

式(22)到式(24)为经过非线性变换后的均值和协方差。

2.2 中心差分卡尔曼滤波方法

将中心差分引入到卡尔曼滤波框架中就构成了 CDKF, 具体算法如下:

2.2.1 参数初始化

$$x_0 = E[x_0] \quad (25)$$

$$P_{x_0} = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (26)$$

2.2.2 时间更新

$$\hat{X}_{k/k-1} = f(X_{k-1}) \quad (27)$$

$$\dot{X}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} X_{ik/k-1} \quad (28)$$

$$P_{k/k-1} = \sum_{i=1}^L [W_i^{(c1)} (X_{i,k/k-1} - X_{L+i,k/k-1})^2 + W_i^{(c2)} (X_{i,k/k-1} + X_{L+i,k/k-1} - 2X_{0,k/k-1})^2] \quad (29)$$

2.2.3 量测更新

$$Y_{k/k-1} = h(X_{k/k-1}) \quad (30)$$

$$Y_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^m Y_{ik/k-1} \quad (31)$$

$$P_{y_k} = \sum_{i=1}^L [W_i^{(c1)} (Y_{i,k/k-1} - Y_{L+i,k/k-1})^2 + W_i^{(c2)} (Y_{i,k/k-1} + Y_{L+i,k/k-1} - 2Y_{0,k/k-1})^2] \quad (32)$$

$$P_{x_k y_k} = \sqrt{W_1^{(c1)} P_{x_{k/k-1}}} [y_{1:L,k/k-1} - y_{L+1:2L,k/k-1}]^T \quad (33)$$

$$K_k = P_{x_k y_k} P_{y_k}^{-1} \quad (34)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k/k-1}) \quad (35)$$

$$P_{x_k} = P_{k/k-1} - K_k P_{y_k} K_k^T \tag{36}$$

式中 $W_0^m = (h^2 - L)/h^2$, $W_i^m = 1/2h^2$, $W_i^{(c1)} = 1/4h^2$, $W_i^{(c2)} = (h^2 - 1)/4h^2, i = 1:2L, h$ 为中心差分步长, 高斯情况下一般取 $\sqrt{3}$ 。

3 仿真算例

3.1 仿真条件

设定星载 CCD 摄像机分辨率是 $2\,048 \times 2\,048$, 像元宽度 $7\,\mu\text{m}$, f 是 $200\,\text{mm}$, 摄像机成像过程中有 1 个像元白噪声误差, 假设目标航天器为 $2\,\text{m} \times 2\,\text{m} \times 2\,\text{m}$ 的一个立方体, 两航天器姿轨参数见表 1。初始位置误差为 $0.5\,\text{m}$, 初始速度误差是 $1 \times 10^{-6}\,\text{m/s}$, 初始姿态误差 0.3° , 仿真时间 $2\,000\,\text{s}$, 步长为 $1\,\text{s}$ 。

表 1 主动航天器和目标航天器的姿轨参数		
轨道参数	主动航天器	目标航天器
升交点赤经/deg	0.0	0.0
轨道倾角/deg	42.225 005	42.225
近地点幅角/deg	0.0	—
偏心率	0.000 000 1	0.0
半长轴/km	6 721.200	6 721.200
过升交点时刻/s	0.013	0.0
初始滚转角/deg	0.1	2.0
初始俯仰角/deg	0.1	2.0
初始偏航角/deg	0.1	2.0
滚转角速率/(deg · s ⁻¹)	0.000 1	0.001
俯仰角速率/(deg · s ⁻¹)	0.000 1	0.001
偏航角速率/(deg · s ⁻¹)	0.000 1	0.08

3.2 仿真结果分析

在本文给定的参数情况下, 采用 EKF 算法和 CDKF 算法进行对比仿真, 仿真结果如图 1 到图 6 所示。其中黑线为 EKF 方法所得到的相对位姿参数, 红线为 CDKF 方法得到的相对位姿参数。图 1 到图 3 为主动航天器与目标航天器间的相对位置估计, 如图所示, X 轴的相对位置精度 EKF 约为 $0.08\,\text{m}$, CDKF 约为 $0.06\,\text{m}$, Y 和 Z 轴的相对位置精度两种算法都为 $0.002\,\text{m}$ 。在相对位置估计方面, 在 X 轴 CDKF 比 EKF 具有更高精度, Y 轴与 Z 轴的估计精度相当。图 4 到图 6 为两航天器相对姿态估计, 从图中可见, 三个轴的相对姿态估计 EKF 精度约为 0.06° , CDKF 精度约为 0.03° 。仿真结果表明 CDKF 算法比 EKF 具有更高的精度和稳定性。

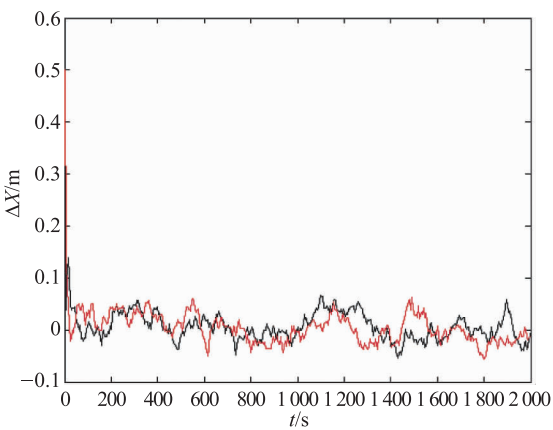


图 1 EKF 与 CDKF 算法的 X 轴误差

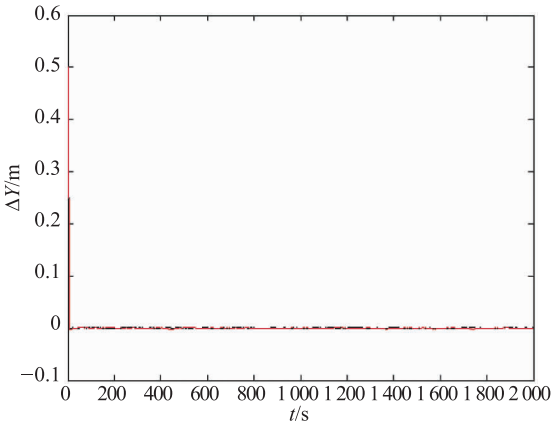


图 2 EKF 与 CDKF 算法的 Y 轴误差

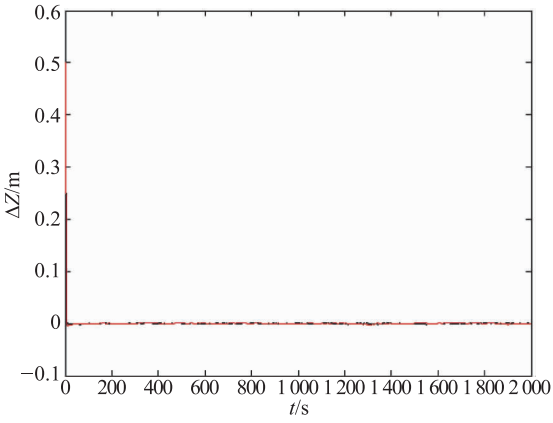


图 3 EKF 与 CDKF 算法的 Z 轴误差

4 结论

针对航天器视觉相对导航的观测方程非线性特点, 深入研究了 CDKF 算法, 并将其应用在航天器视觉相对导航中。仿真结果表明, CDKF 具有比 EKF 更高的估计精度和稳定性, 这是由于 EKF 对观

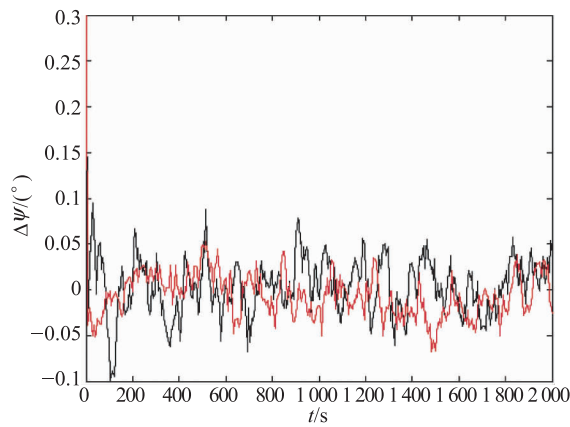


图4 EKF 与 CDKF 算法的俯仰角误差

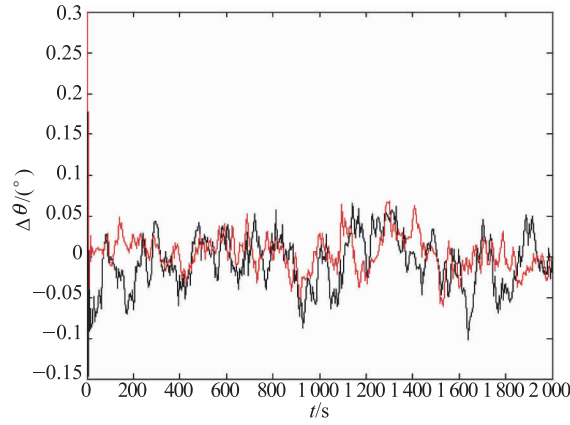


图5 EKF 与 CDKF 算法的滚转角误差

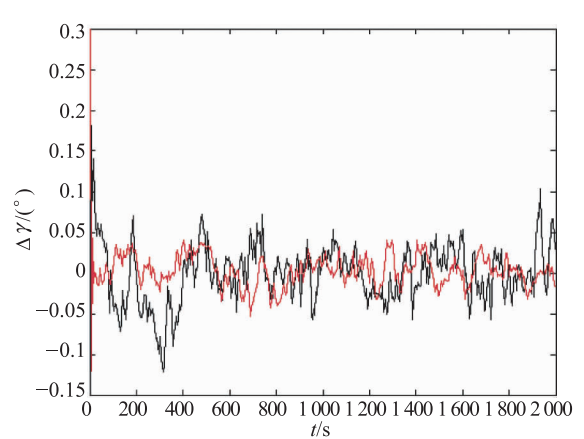


图6 EKF 与 CDKF 算法的偏航角误差

参 考 文 献

1 Alonso R, Crassidis J L, Junkins J L. Vision-based Navigation for formation flying of spacecraft. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Denver, CO, AIAA-2000-4439. August 2000.

2 张淑琴. 空间交会对接测量技术及工程应用. 北京:中国宇航出版社,2005,17—20

3 Curtis H D. 轨道力学. 周建华,徐 波,冯全胜,译. 北京:科学出版社,2009,259—263

4 陈记争,袁建平,方 群. 基于 Rodrigues 参数的姿态估计算法. 航空学报,2008;29(4):960—965

5 Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O New developments in state estimation for nonlinear system. Automatica, 2000; 36 (11): 1627—1638

6 Nørgaard M, Poulsen N K, Ravn O Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems. Copenhagen: Technology University of Denmark,2000

测方程线性化时产生了高阶截断误差,从而降低了估计精度,而 CDKF 能够很好地避免这个问题。由此可以看出,CDKF 更适用于航天器视觉导航中。

Study of Relative Navigation for Spacecraft Based on Central Difference Kalman Filter

ZHAO Kai, YUE Xiao-kui, WU Kan-zhi

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P. R. China)

[Abstract] In the research of vision-based relative navigation for spacecrafts, the non-linearity of measurement equation shows great influence on the estimation accuracy of relative position and attitude. First, the drawbacks of using Extended Kalman Filte (EKF) on the linearization of nonlinear model is analyzed; then Center Difference Kalman Filter (CDKF) method is discussed and applied to relative position and attitude estimation of spacecraft, last the simulation results using Extended Kalman Filter (EKF) and Center Difference Kalman Filter (CDKF) are presented. The results demonstrate that under the same condition, CDKF algorithm out-performed EKF in accuracy therefore can be applied to vision-based navigation of spacecrafts.

[Key words] Center Difference Kalman Filter (CDKF) vision-based navigation relative position and attitude