一般工程技术

指数可靠性增长模型研究

韩庆田 李文强 曹文静
(海军航空工程学院,烟台 264001)

摘 要 产品的可靠性增长试验通常有若干个阶段,每个阶段都是在设计、工艺、材料等方面有所改进时进行的,可靠度不断提高。结合产品研制阶段的可靠性增长特点,基于 Duane 学习曲线性质,研究了可靠性增长模型,给出了参数的极大似然估计和可靠性评估方法。实例分析结果表明模型方法简单,符合工程实际,适合小子样产品的可靠性增长评估。

关键词 可靠性 可靠性增长 可靠性评估
中图法分类号 TB114.3; **文献标志码** A

产品的可靠性增长试验通常有若干个阶段,每个阶段都是在前面阶段的基础上在设计、工艺、材料等方面有所改进,以提高可靠度。由于产品处于改进阶段,所以每个阶段的产品的寿命所对应的总体就是不同的,因此估计最后阶段的可靠度及求其置信下限就有了一定的困难。如果利用初等统计的单个个体的方法,仅对最后阶段的实验数据进行分析,对信息造成很大的浪费,通常来说得不到很好的结果[1]。因此需要综合利用各阶段的数据,对最后阶段的可靠度进行统计推断。

本文讨论基于 Duane 学习曲线性质的可靠性增长模型,即假设各个阶段产品的寿命服从相互独立的指数分布,指数分布的参数满足特定的形式。

1 指数可靠性增长模型

1964 年,Duane 通过对一些工业系统的故障数据的研究得到了 Duane 学习曲线性质(Duane Learning Curve Property):经验累积故障率与累积试验时间分别取对数以后呈近似的线性关系[2]。

1974 年,Crow 将 Duane 的理论改进为:一个新系统在改进过程中的故障数服从非齐次泊松过程(Nonhomogeneous Poisson Process,简称 NHPP),且具有 Weibull 形式的强度函数[3]。

由于此模型的强度函数的形式的特殊性,通常称之为 Power Law Process,简称为 PLP 过程,PLP 模型是满足 Duane 学习曲线性质的。然而 PLP 模型假设系统故障强度是连续变化的函数,但是在工程实际中,由于系统的改进只是发生在某些时刻,因此其故障强度函数不可能是时间的连续变化函数。针对这一问题,许多学者讨论加以改进。Sen & Bhattacharyya 将其进一步改进为逐步加强的某些(Step Intensty Model),某些描述如下[4,5]:

记 $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ 为所研究的系统的相继故障的时间,$T_i - T_{i-1}$ 相互独立,且服从参数为 λ_i 的指数分布,即

$$P(T_i - T_{i-1} \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_i x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

,其中($i = 1,2,\cdots; T_0 = 0$)。

其中 λ_i,($i = 1,2,\cdots$)的表达式为:

$$\lambda_i = \frac{\mu}{\delta} i^{1-\delta}, \mu > 0, \delta \geqslant 1 \qquad (1)$$

称具有上述故障强度形式的模型为 ERG I。

对于相继故障时间 $0 < T_1 < T_2 < \cdots$,$\frac{i}{T_i}$ 为累计故障率的经验描述,由 Duane 学习曲线的性质可知,$\ln\left(\frac{i}{T_i}\right)$ 与 $\lg(T_i)$ 存在线性对应关系。即

$$\ln(T_i) = a\ln\left(\frac{i}{T_i}\right) + b \qquad (2)$$

那么 $T_i = i^{\frac{a}{a+1}} e^{\frac{b}{a+1}} = (i e^{\frac{b}{a}})^{\frac{a}{a+1}}$。令 $\delta = \frac{a}{a+1}$,$c = e^{-\frac{b}{a}}$,得

2011 年 11 月 4 日收到,11 月 18 日修改

第一作者简介:韩庆田(1976—),男,讲师,博士后。研究方向:装备管理,可靠性工程,控制科学与工程。E-mail:hbluesky@163.com。

$$T_i = \left(\frac{i}{c}\right)^{\delta} \tag{3}$$

$$T_i - T_{i-1} = \frac{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}{c^{\delta}} \tag{4}$$

$$E(T_i - T_{i-1}) = \frac{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}{c^{\delta}} \tag{5}$$

令 $\mu = c^{\delta}$,于是得到

$$\lambda_i = \frac{\mu}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}, \mu > 0, \delta \geqslant 1 \tag{6}$$

本文称具有上述故障率模型为 ERG II。下面研究其参数估计和可靠性增长评估及其在发动机可靠性评估中的应用。

2　模型参数的极大似然估计

2.1　故障截尾试验

设某系统进行故障截尾试验,$0 = t_0 < t_1 < t_2 <, \cdots, < t_{n-1} < t_n$ 为顺序故障时刻,故障间隔时间分别为 $x_i = t_i - t_{i-1}, (i = 1, 2, \cdots, n)$。

似然函数

$$L(\mu, \delta) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x_i} \tag{7}$$

对数似然函数

$$\ln L(\mu, \delta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i x_i = n \ln \mu - \sum_{i=1}^{n} \ln[i^{\delta} - (i-1)^{\delta}] - \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}} \tag{8}$$

通过分别对参数 μ 和 δ 求偏导:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \mu} = \frac{n}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}};$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \delta} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{[i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)] x_i}{[i^{\delta} - (i-1)^{\delta}]^2}$$

并令其为 0,可以得到

$\frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \mu} = 0, \frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \delta} = 0$,得

$$\mu = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}} \tag{9}$$

$$n \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{[i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)] x_i}{[i^{\delta} - (i-1)^{\delta}]^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}。 \tag{10}$$

2.2　时间截尾试验

故障时间和截尾时间为:

$0 = t_0 < t_1 < t_2 <, \cdots, < t_{n-1} < t^*$,故障间隔时间为:

$x_i = t_i - t_{i-1}, (i = 1, 2, \cdots, n-1), x_n = t^* - t_{n-1}$。

似然函数为

$$L(\mu, \delta) = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{-\lambda_i x_i} e^{-\lambda_n x_n} \tag{11}$$

对数似然函数

$$\ln L(\mu, \delta) = \sum_{i=1}^{n-1} \ln \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i x_i = (n-1) \ln \mu - \sum_{i=1}^{n-1} \ln[i^{\delta} - (i-1)^{\delta}] - \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}} \tag{12}$$

求偏导得:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \mu} = \frac{n-1}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}};$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \delta} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{[i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)] x_i}{[i^{\delta} - (i-1)^{\delta}]^2}$$

令 $\frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \mu} = 0, \frac{\partial \ln L(\mu, \delta)}{\partial \delta} = 0$,得

$$\mu = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}} \tag{13}$$

$$(n-1) \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{[i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)] x_i}{[i^{\delta} - (i-1)^{\delta}]^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{\delta} \ln i - (i-1)^{\delta} \ln(i-1)}{i^{\delta} - (i-1)^{\delta}} \tag{14}$$

类似的可以得到估计值 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\delta}$。则截尾时刻 t^* 时的 MTBF

$$\theta(t^*) = \frac{n^{\hat{\delta}} - (n-1)^{\hat{\delta}}}{\hat{\mu}} \tag{15}$$

3　应用分析

3.1　故障截尾试验

设发动机顺序故障时刻分别为 2.2,4.6,9.7,17.9,32.8 min。得到各个参数的估计和 MTBF 的估计,见表 1。故障强度函数图 1 所示。

表 1　故障截尾试验参数和 MTBF 的估计

模型	估计值 参数	MTBF/min
DUANE[2]	$\hat{m}=0.416\,710$ $\hat{a}=0.725\,211$	10.123 484
AMSAA[3]	$\hat{a}=0.339\,755$ $\hat{b}=0.770\,384$	8.515 239
ERGI[4]	$\hat{\mu}=1.336\,409$ $\hat{\delta}=2.180\,385$	10.905 554
ERGII[5]	$\hat{\mu}=0.591\,488$ $\hat{\delta}=1.821\,654$	10.595 051

表 2　时间截尾试验参数的估计和 MTBF 的估计

模型	估计值 参数	MTBF/min
DUANE[2]	$\hat{m}\hat{m}=0.532\,374$ $\hat{a}=0.887\,538$	23.131 155
AMSAA[3]	$\hat{a}=0.633\,289$ $\hat{b}=0.486\,353$	28.785 701
ERGI[4]	$\hat{\mu}=1.840\,042$ $\hat{\delta}=2.500\,789$	20.002 750
ERGII[5]	$\hat{\mu}=0.750\,533$ $\hat{\delta}=2.324\,881$	29.660 683

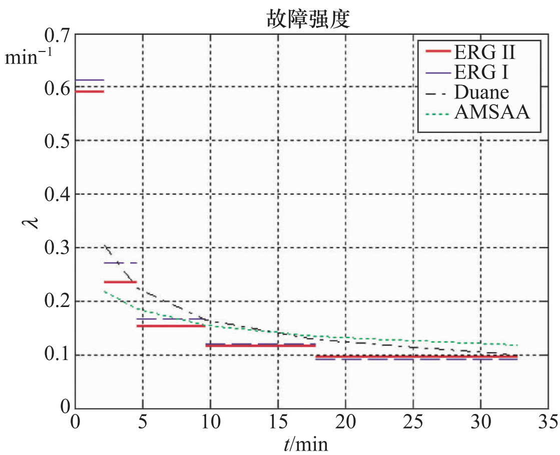

图 1　故障截尾试验故障强度函数

3.2　时间截尾试验

设发动机顺序故障时间为 2.2,4.6,9.7,17.9,32.8 min,在 70 min 时刻终止试验。参数和 MTBF 估计,见表 2。故障强度函数如图 2 所示。

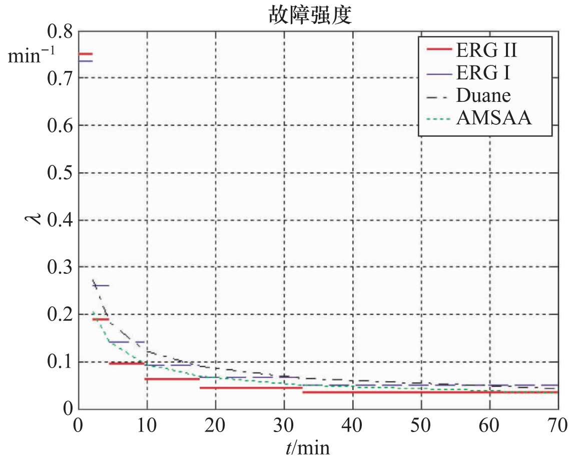

图 2　故障截尾试验故障强度函数

与 Duane 和 AMSAA 模型进行了比较,模型具有一定的精度,并且模型适合于小样本数据评估。

4　结束语

本文给出的指数可靠性增长评估模型,计算方法简单,评估结果符合工程实际,适合小子样产品的可靠性增长评估。

参　考　文　献

1　周源泉, 翁朝曦. 可靠性增长 . 北京: 科学出版社, 1992

2　Duane J T. Learning curve approach to reliability monitoring . IEEE Trans Aerosp, 1964;2: 563—566

3　Crow L H. Reliability analysis for complex repairable system. ADA0296, 1975

4　Sen A. Estimation of current reliability in a Duane－based reliability growth model. Thechnometrics,1996;(40): 334—344

5　刘俊荣.关于基于 Duane 曲线的可靠性增长模型. 北京: 北京大学, 2002

Research on Exponential Reliability Growth Models

HAN Qing-tian, LI Wen-qiang, CAO Wen-jing

(Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, P. R. China)

[**Abstract**]　During the period of development of the products, the reliability is always growing for the improvement of the designation, technology, materials, *etc*. Considering the reliability growth characteristics of the product during development phase, based on the nature of the Duane learning curve, the exponential reliability growth models was studied, and the parameters of the maximum likelihood estimator and reliability assessment method were given. The case study results show that the model is simple, actual project for small sample reliability growth assessment.

[**Key words**]　reliability　　reliability growth　　reliability assessment