第11卷 第32期 2011年11月
1671—1815(2011)32-7862-04
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 11 No. 32 Nov. 2011
© 2011 Sci. Tech. Engrg.

具依赖状态脉冲的积分微分系统的最终稳定性

冯欣欣 张立琴*
(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

摘 要 将变分 Lyapunov 函数方法和比较原理相结合,得到了具依赖状态脉冲积分微分系统新的比较原理,并利用这一比较原理得到了该系统的最终稳定性准则。

关键词 脉冲积分微分系统 变分 Lyapunov 函数 最终稳定性 比较原理
中图法分类号 O175.21; **文献标志码** A

脉冲积分微分系统作为非线性脉冲微分系统的一个重要分支,有着广泛的实际背景和应用性,近年来已取得一些研究成果。然而对具依赖状态脉冲的积分微分系统的研究成果并不多见[1—3]。本文将利用变分 Lyapunov 函数[4]建立比较原理,从而得到此类系统的最终稳定性的充分条件。需指出的是文中的比较原理允许解曲线碰撞同一脉冲面有限次。

1 预备知识

考虑如下具依赖状态脉冲的积分微分系统

$$\begin{cases} x' = f(t,x,Tx), & t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), & t = \tau_k(x) \\ x(t_0^+) = x_0, & k = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

及其相应的脉冲微分系统

$$\begin{cases} y' = F(t,y), & t \neq t_k \\ \Delta y = I_k^*(x), & t = t_k \\ y(t_0^+) = x_0, & k = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

其中 $f(t,x,Tx) = F(t,y) + R(t,x,Tx)$,
$I_k(x) = I_k^*(x) + R_k^*(x)$,

$Tx = \int_{t_0}^{t} L(t,s,x(s))\,\mathrm{d}s, L \in C[R_+^2 \times R^n, R^n]$,$R(t,x,Tx)$ 与 $R_k^*(x)$ 均为摄动项,脉冲时刻满足 $I_k(x) = I_k^*(x) + R_k^*(x), \tau_k(x) < \tau_{k+1}(x); k \in N_+$,且对任意的 $x \in R^n$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k(x) = +\infty$,$f, F, I_k, I_k^*$ 满足一定的条件以保证系统(Ⅰ)(Ⅱ)的解整体存在唯一。

设 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$,$t \geqslant t_0$ 为系统(Ⅰ)的任一解,则 $x(t)$ 为具有第一类间断点且在间断点处左连续的分段连续函数。设 $x(t)$ 在 $t = t_i$ 遇到脉冲面 S_{k_i},则有

$x(t_i^-) = x(t_i), \Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_{k_i}(t_i, x(t_i))$。

同时考虑比较系统

$$\begin{cases} u' = g(t,s,u), & s \neq t_k \\ u(t_k^+) = \psi_k(u(t_k)), & s = t_k \\ u(t_0^+) = u_0, & k = 1,2,3,\cdots \end{cases} \tag{Ⅲ}$$

式(Ⅲ)中 $g: R_+^2 \times R_+^N \to R^N$ 在 $(t_k, t_{k+1}]$ 上关于 s 连续,对每一 $t \in R_+$,$u \in R_+^N$,有 $\lim\limits_{(t,s,w)\to(t,t_k^+,u)} g(t,s,w) = g(t,t_k^+,u)$ 成立,且 $g(t,s,u)$ 对任意的 $t \in R_+$ 关于 u 拟单调不减,$\psi_k: R_+^N \to R_+^N$ 关于 u 拟单调不减。

为叙述方便,引入记号:

$\Gamma = \{h \in C[R_+ \times R^n, R_+]: \inf\limits_{(t,x)\in R_+\times R^n} h(t,x) = 0\}$;

$\Sigma = \{Q \in C[R^N \times R_+]: Q(0) = 0, Q(u)$ 关于 u 严格递增$\}$;

$K = \{a \in C[R_+, R_+]: a(0) = 0, a(u)$ 关于 u 严格递增$\}$;

2011年8月22日收到 国家自然科学基金(10871120)资助
* 通信作者简介:张立琴,女,山东师范大学数学科学学院教授。

$S_k=\{(t,x)\in R_+\times R^n:t=\tau_k(x)\},k\in N_+$;

$G_k=\{(t,x)\in R_+\times R^n:\tau_{k-1}(x)<t\leqslant\tau_k(x)\}$, $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$;

$G_k^0=\{(t,x)\in R_+\times R^n:\tau_{k-1}(x)<t<\tau_k(x)\}$, $G^\circ=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k^0$;

$V_0=\{V:R_+\times R^n\to R_+$,在集合 G_k 上连续,且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件,对所有 $(t_k,x)\in S_k$, $k\in N_+$,极限 $\lim\limits_{(t,y)\to(t_k,x),(t,y)\in G_{k+1}}V(t,y)=V(t_k^+,x)\}$ 存在。

定义 1　设 $V\in V_0$,对任给的 $(s,x)\in G^0$, $V(t,x(t))$ 沿系统(I)解的右上导数定义为 $[V(s+h,y(t,s+h,x+hf(t,x,Tx))-V(s,y(t,s,x(s)))]$。

定义 2　设 $h_0,h\in\Gamma$,称系统(I)为(ⅰ)(h_0,h)-最终稳定:$\forall\varepsilon>0,t_0\in R_+$, $\exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon),\tau=\tau(t_0,\varepsilon)>0$,使当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta$ 时,$h(t,x(t))<\varepsilon$, $t\geqslant t_0\geqslant\tau$;(ⅱ)$(h_0,h)$-最终一致稳定:若(ⅰ)中 δ,τ 选取与 t_0 无关;(ⅲ)(h_0,h)-拟一致最终渐近稳定:$\exists\delta_0,\tau_0>0$,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists T=T(\varepsilon)>0$,使当 $h_0(t^+{}_0,x_0)<\delta_0$ 时,有 $h(t,x(t))<\varepsilon,t\geqslant t_0+T,t\geqslant\tau_0$;(ⅳ)$(h_0,h)$-最终一致渐近稳定:若(ⅱ)(ⅲ)同时成立。

定义 3　设 $(h_0,\overline{h_0})\in\Gamma$,称系统(Ⅱ)为 $(h_0,\overline{h_0})$-最终稳定:$\forall\varepsilon>0,t_0\in R_+$, $\exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon),\tau=\tau(t_0,\varepsilon)>0$,使当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta$ 时,$\tilde{h}_0(t_0^+,(y(t))<\varepsilon,t\geqslant t_0\geqslant\tau$。类似可以给出(Ⅱ)的其它 $(h_0,\overline{h_0})$-最终稳定性定义。

定义 4　设 $Q_{0,}Q\in\Sigma$,称系统(Ⅲ)为 (Q_0,Q)-最终稳定:$\forall\varepsilon>0,t_0\in R_+$, $\exists\delta=\delta(t_0,\varepsilon),\tau=\tau(t_0,\varepsilon)>0$,使当 $Q(u_0)<\delta$ 时,$Q(u(t))<\varepsilon,t\geqslant t_0\geqslant\tau$。类似可以给出(Ⅲ)的其它 (Q_0,Q)-最终稳定性定义。

2　主要结果

定理 1　假设如下条件满足:

(ⅰ)$V\in V_0$, $\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件;

(ⅱ)$D^+V(s,y(t,s,x(s)))\leqslant g(t,s,V(s,y(t,s,x(s))))$;$(s,x)\in G^0,t_0\leqslant s\leqslant t$,

$V(t_k^+,y(t,t_k^+,x(t_k)+I_k(x(t_k))))\leqslant\psi_kV(t_k,y(t,t_k,x(t_k)))$,

其中 g,ψ_k 如前面所述,$k=1,2,3,\cdots$;

设 $r(t,s,t_0,u_0)$ 是式(Ⅲ)在 $(t_0,t]$ 上的最大解。

则当 $V(t_0,y(t,t_0,x_0))\leqslant u_0$ 时,有 $V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant r(t,s,t_0,u_0),t\geqslant t_0$。

其中
$$r(t,s,t_0,u_0)=\begin{cases}r_0(t,s,t_0,u_0), & t_0<s\leqslant t\leqslant t_1,\\ r_1(t,s,t_1,r(t,t_1^+)), & t_1<s\leqslant t\leqslant t_2,\\ \vdots & \\ r_k(t,s,t_k,r(t,t_k^+)), & t_k<s\leqslant t\leqslant t_{k+1},\\ \vdots & \end{cases}$$
。

$r_k(t,s,t_k,r(t,t_k^+))$ 是式(Ⅲ)在 $(t_k,t_{k+1}]$ 上的最大解。$r(t,t_0,u_0)\equiv r(t,t,t_0,u_0)$, $x(t,t_0,x_0)$ 及 $y(t,t_0,x_0)$ 分别是式(Ⅰ)、式(Ⅱ)的解。

证明　令 $y(t)=y(t,s,x(s))$ 为系统(Ⅱ)$t_0\leqslant s\leqslant t$ 上的以 $(s,x(s))$ 为初始点的任意解并有 $V(t_0,y(t,t_0,x_0))\leqslant u_0$,

设 $x(t)=x(t,t_0,x_0),t\geqslant t_0$ 为系统(Ⅰ)的任意解,且 $\tau_k(x_0)<t_0\leqslant\tau_{k+1}(x_0)$ 对某一 k 成立。令 $\{t_i\}$ 为积分曲线 $(t,x(t))$ 碰撞脉冲面 $\{S_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 的时刻,即 $t_i=\tau_{k_i}(x(t_i))$。不妨设 $t_i<t_{i+1}$,因解曲线可与同一脉冲面碰有限次,故 $k_i=k_j,i\neq j$ 的情况可能生。

令 $m(t,s)=V(s,,y(t,s,x(s)))$,则 $(s,x)\in G^0$ 时,对充分小的 $h>0$,有 $m(t,s+h)-m(t,s)=V(s+h,y(t,s+h,x(s+h)))-V(s,y(t,s,x(s)))$。

由于对任意的 (t,s), $V(t,x)$ 及 $\|y(t,s,x(s))\|$ 关于 x 均满足局部 Lipschitz 条件,从而有 $D^+m(t,s)\leqslant g(t,s,m(t,s)),(s,x)\in G^0,t_0\leqslant s\leqslant t$,

当 $(s,x)\in S_k$ 时,

$m(t,t_k^+)=V(t_k^+,y(t,t_k^+,x(t_k)+I(x(t_k))))\leqslant\psi_k(V(t_k,y(t,t_k,x(t_k))))=\psi_k(m(t,t_k))$ 且 $m(t,t_0)\leqslant u_0$,从而当 $s\in(t_0,t_1]$ 时,由比较定理(文献[2],定理1.7.1)知 $m(t,s)\leqslant r_0(t,s,t_0,u_0),s\leqslant t$,其中 $r_0(t,s,t_0,u_0)$ 是系统(Ⅲ)在 $[t_0,t]$ 上的最大解,假设当 $s\in(t_{k-1},t_k]$ 时,有 $m(t,s)\leqslant r_{k-1}(t,s,t_{k-1},r(t,t_{k-1}^+)),s\leqslant t$。

则 $m(t,t_k^+)\leqslant\psi_k(m(t,t_k))\leqslant\psi_k(r(t,t_k,t_{k-1},r(t,t_{k-1}^+)))=r(t,t_k^+)$，

从而当 $s\in(t_k,t_{k+1}]$ 时，由比较定理（文献[5]，定理 1.7.1）知 $m(t,s)\leqslant r_k(t,s,t_k,r(t,t_k^+))$，$s\leqslant t$。

由数学归纳法知 $m(t,s)\leqslant r(t,s,t_0,u_0)$，$t_0\leqslant s\leqslant t$。

即 $V(s,x(t,s,x(s)))\leqslant r(t,s,t_0,u_0)$，$t_0\leqslant s\leqslant t$。

定理 2 令 $h_0,h\in\Gamma$，且

（ⅰ）$V\in V_0$，且对任意的 (t,s)，$\|y(t,s,x)\|$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件；

（ⅱ）$D^+V(s,y(t,s,x(s)))\leqslant g(t,s,V(s,y(t,s,x(s))),(s,x)\in G^0,t_0\leqslant s\leqslant t$,

$V(t_k^+,y(t,t_k^+,x(t_k)+I_k(x(t_k))))\leqslant\psi_kV(t_k,y(t,t_k,x(t_k)))$，其中 g,ψ_k 如前所述；

（ⅲ）$Q_0,Q\in\Sigma$，且存在 $a,b\in k$，使得对 $(t,s)\in R_+\times R^n$ 有 $b(h(t,x))\leqslant Q(V(t,x))$，$Q_0(V(t,x))\leqslant a(h_0(t,x))$。

（ⅳ）系统（Ⅱ）为 $(h_0,\overline{h_0})$-最终稳定的；

则由式（Ⅲ）(Q_0,Q)-最终稳定可以推出系统（Ⅰ）为 (h_0,h)-最终稳定。

证明 $\forall\varepsilon>0$，由系统（Ⅲ）(Q_0,Q)-最终稳定知：

对于 $b(\varepsilon)>0$，$\exists\delta_1=\delta_1(t_0,\varepsilon)$，$\tau_1=\tau_1(t_0,\varepsilon)>0$，当 $Q_0(u_0)<\delta_1$ 时，有 $Q(u(t,t_0,u_0))<b(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau_1$。其中 $u_0(t,t_0,u_0)=u(t,t,t_0,u_0)$，$u(t,s,t_0,u_0)$ 是系统（Ⅱ）在 $[t_0,t]$ 上的任意解。

由系统（Ⅱ）为 $(h_0,\overline{h_0})$-最终稳定的知：

对于 $a^{-1}(\delta_1)$，$\exists\delta_2=\delta_2(t_0,\varepsilon)$，$\tau_2=\tau_2(t_0,\varepsilon)>0$，当 $h_0(t_0^+,x)<\delta_2$ 时，有 $\tilde{h}_0(t_0^+,(y(t))<a^{-1}(\delta_1)$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau_2$，其中 $y(t)=y(t,t_0,x_0)$ 是系统（Ⅱ）的任意解。

取 $\delta=\delta_2(t_0,\varepsilon)>0$，

$\tau(t_0,\varepsilon)=\max\{\tau_1(t_0,\varepsilon),\tau_2(t_0,\varepsilon)\}>0$。

下面证当 $h_0(t_0^+,x_0)<\delta$ 时，$h(t,x)<\varepsilon$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau$. 其中 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 是系统（Ⅰ）的任意解。

由条件（ⅱ），根据定理 1 知

$V(t,x(t,t_0,x_0))\leqslant r(t,t_0,V(t_0,y(t)))$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau$. 其中 $r(t,t_0,V(t_0,y(t)))=r(t,t,t_0,V(t_0,y(t)))$，$r(t,s,t_0,V(t_0,y(t)))$ 是（Ⅲ）以 $(t_0,V(t_0,y(t)))$ 为初始点的在 $[t_0,t]$ 上的最大解。

由条件（ⅲ）知 $Q_0(V(t_0,y(t)))\leqslant a(h_0(t_0,y(t)))<a(a^{-1}(\delta_1))=\delta_1$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau$。

又 $b(h(t,x(t)))\leqslant Q(V(t,x(t)))\leqslant Q(r(t,t_0,V(t_0,y(t)))<b(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau$。

所以 $h(t,x(t))<\varepsilon$，$t\geqslant t_0\geqslant\tau$。即系统（Ⅰ）为 (h_0,h)-最终稳定。

定理 3 定理 2 的其它条件不变，将（ⅳ）变成（ⅳ）* 系统（Ⅱ）为 $(h_0,\overline{h_0})$-最终一致稳定。

则由系统（Ⅲ）(Q_0,Q)-最终一致稳定可以推出系统（Ⅰ）(h_0,h)-最终一致稳定。

证明 类似定理 1 的证明，此时 $\delta_1,\delta_2,\tau_1,\tau_2$ 的选取与 t_0 无关，具体过程省略。

类似可证下面定理。

定理 4 在定理 3 的条件下，可由系统（Ⅲ）(Q_0,Q)-最终一致渐近稳定推出系统（Ⅰ）(h_0,h)-最终一致渐近稳定。

例 考虑如下脉冲摄动积分微分系统

$$\begin{cases} x'_1=e^{-t}x_1^3+\dfrac{1}{2}x_1x_2^2\displaystyle\int_{t_0}^{t}F_1(t,u,x_1(u))\mathrm{d}u+\dfrac{1}{2}x_1^3,t\neq\tau_k(x); \\ x'_2=e^{-t}x_2^3+\dfrac{1}{2}x_1^2x_2\displaystyle\int_{t_0}^{t}F_2(t,u,x_2(u))\mathrm{d}u+\dfrac{1}{2}x_2^3,t\neq\tau_k(x); \\ x_1(t_k^+)=d_1x_1(t_k),x_1(t_0)=x_{10}\geqslant 0; \\ x_2(t_k^+)=d_2x_2(t_k),x_2(t_0)=x_{20}\geqslant 0, \\ k=1,2,3,\cdots, \end{cases} \tag{IV}$$

式(IV)中 $\int_{t_0}^{s}F_i(t,u,x_i(u))\mathrm{d}u\leqslant 0$，$t_0\leqslant s<t$，$i=1,2$，且 $|d_1|\leqslant 1$，$|d_2|\leqslant 1$，$0<\tau_1(x)<\tau_2(x)<\cdots<\tau_k(x)<\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k(x)=+\infty$。

考虑相应的无脉冲作用的非摄动系统

$$\begin{cases} y'_1=e^{-t}y_1^3, & y_1(t_0)=x_{10} \\ y'_2=e^{-t}y_2^3, & y_1(t_0)=x_{20} \end{cases} \tag{V}$$

易得系统(V)的解为

$$y(t,t_0,x_0)=\begin{pmatrix} y_1(t,t_0,x_{10}) \\ y_2(t,t_0,x_{20}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{x_{10}}{[1+2x_{10}^2(e^{-t}-e^{-t_0})]^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{x_{20}}{[1+2x_{20}^2(e^{-t}-e^{-t_0})]^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix},$$

显然系统(V)是$(h_0,\overline{h_0})$-最终稳定的,

令 $x=(x_1,x_2)$,选取 $V(t,x)=x_1^2+x_2^2$ 且

$h_0(t,x)=h(t,x)=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}$。

$$Q_0(V(t,x))=Q(V(t,x))=(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}=h_0(t,x)=h(t,x)。$$

很明显 V 是可微的,所以有

$$D^+V(s,y(t,s,x))=2y_1y'_1+2y_2y'_2=2e^{-t}(y_1^4+y_2^4)\leqslant 2e^{-s}V;$$

$$V(t_k^+,y(t,t_k^+,x(t_k^+)))=\frac{d_1^2x_1^2(t_k)}{1+2d_1^2x_1^2(t_k)(e^{-t}-e^{-t_k})}+\frac{d_2^2x_2^2(t_k)}{1+2d_2^2x_2^2(t_k)(e^{-t}-e^{-t_k})}\leqslant d^2V(t_k,y(t,t_k,x(t_k))),$$

其中 $d=\max\{|d_1|,|d_2|\}$。

建立比较系统为

$$\begin{cases}u'=2e^{-s}u,t\neq t_k\\ u(t_k^+)=d^2u(t_k)\\ u(t_0^+)=u_0,t_0\geqslant 0,k\in N\end{cases}\qquad(\text{VI})$$

易得系统(VI)是(Q_0,Q)-最终稳定的,因此根据定理 2 知系统(IV)是(h_0,h)-最终稳定的。

参　考　文　献

1　Kaul S K, Liu Xinzhi. Impulsive integro-differential equations with variable times. Non Stud, 2001; 8(1): 21—33

2　庞玉玉,张立琴. 具有依赖于状态脉冲的积分微分系统的稳定性. 科学技术与工程,2010;10(3):630—633

3　赵　岩,张立琴. 具依赖状态脉冲的积分微分系统的实际稳定性. 科学技术与工程,2011;11(4):689—692

4　Lakshmikantham V, Liu Xinzhi, Leela S. Variationa Lyapunov method and stability theory. Mathematical Problem in Engineering, 1998; 3: 555—571

5　Lakshmikantham V, Leela S. Differential and IntegralInequalities. Vol. 1, New York: Academic Press, 1969

Ultimate Stability for Impulsive Integro-differential Equations with Variable Times

FENG Xin-xin, ZHANG Li-qin*

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**]　A new comparison principle of impulsive integro-differential equations with variable times is established by variational Lyapunov function and comparison theorem, and then be applied to obtain a ultimate stability criterion of such systems.

[**Key words**]　impulsive integro-differential systems　variational Lyapunov function　ultimate stability　comparison principle