

带休假延迟和休假可中止的 Geom/Geom/1 排队

师海燕¹ 魏 淳²

(首都师范大学¹, 北京 100048; 山西大同大学², 大同 037008)

摘 要 研究了一个带有休假延迟和休假可中止的 Geom/Geom/1 排队系统。当服务台结束对一个顾客服务而使系统变空时并不是立即开始工作休假,而是进入一个为休假做准备的空闲期,称之为延迟休假期。如果在这个延迟休假期内没有顾客到达,服务台才进入工作休假。在这个模型中,工作休假是可中止的。利用拟生灭过程和矩阵几何解方法,给出了稳态下队长的分布和队长的概率母函数。此外,也得到了队长和逗留时间的随机分解结构及附加队长和附加延迟的分布。

关键词 延迟休假 休假可中止 矩阵几何解 随机分解

中图法分类号 O226; **文献标志码** A

在过去的 20 多年里,休假排队已经得到了广泛而深入的研究,并形成了理论框架。近来, Servi 和 Finn^[1]引入了一类半休假策略:服务员在假期中并未完全停止工作而是以较低的速率为顾客服务,这种休假策略称为工作休假。Li 和 Tian^[2]首次提出了带有休假可中止的 M/M/1 工作休假排队系统。Li 和 Tian 在文献[3]中研究了 GI/M/1 带休假可中止的多重工作休假排队。随后,Tian, Ma 和 Liu^[4]分析了离散时间 Geom/Geom/1 多重工作休假排队。Li, Tian 和 Ma^[5]研究了 M/M/1 休假可中止的工作休假排队。朱翼隽和石秀闯^[6]研究了休假可中止的 M/G/1 工作休假排队。2011 年,潘小春和朱翼隽^[7]运用矩阵几何解的方法求得到稳态队长和逗留时间的概率母函数,并证明了队长和逗留时间的随机分解结构。

目前,休假可中止的工作休假排队系统,是国内外专家研究的重点,如文献[2,3]。本文在文献[4]的基础上引入延迟休假并把工作休假推广为休假可中止的工作休假。当延迟休假时间为 0 时,本模型成为休假可中止的 Geom/Geom/1 多重工作休假。

1 模型描述

本文规定,对任意实数 $x \in [0, 1]$, 记 $\bar{x} = 1 - x$ 。带延迟休假和休假可中止的 Geom/Geom/1 多重工作休假排队模型可描述如下。

潜在的顾客到达发生于时隙末端 $(n-, n)$ 处,服务的开始和结束都发生在时隙分点 $t = n$ 处,假设休假的开始与结束都发生在时隙末端 $(n-, n)$ 处,到达间隔 T 、服务时间 S_b 与 S_v 、延迟休假时间 U 、休假时间 V 相互独立分别服从参数为 $p, \mu_b, \mu_v, \alpha_0, \theta$ 的几何分布。

当服务台结束对一个顾客服务而使系统变空时并不是立即开始工作休假,而是进入一个为休假做准备的空闲期,称之为延迟休假期。如果在这个延迟休假期内没有顾客到达,服务台才进入工作休假。工作休假中有两种情况可转入正规忙期,第一种:工作休假期间完成一个顾客服务,并且系统中有顾客等待,则中止正在进行的工作休假转入正规忙期;否则继续保持在工作休假状态上。第二种:若某次工作休假结束时系统内有顾客在场,正在进行的服务由速率 μ_v 转换到速率 μ_b ,开始一个正规忙期;否则开始另一次独立同分布的工作休假,称这

样的休假机制为休假可中止的工作休假策略(参见田乃硕,徐秀丽等^[8])。

先到先服务(FIF₀)规则。令 Q_n 表示在时刻 n^+ 系统中的顾客数, J_n 表示系统在时刻 n^+ 所处的状态。我们讨论的是晚到有延迟入口的离散时间排队模型。

定义

$$J_n = \begin{cases} 0, & \text{时刻 } n^+ \text{ 系统处于工作休假;} \\ 1, & \text{时刻 } n^+ \text{ 系统处于正规忙期。} \end{cases}$$

$\{(Q_n, J_n), n \geq 0\}$ 是一个离散时间的 Markov 链, 其状态空间为: $\Omega = \{(k, j), k \geq 0, j = 0, 1\}$ 。其中(0, 1)为延迟休假状态。

对状态进行字典序排列, 状态转移概率矩阵可写为:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & & & \\ B_0 & A & C & & \\ & B & A & C & \\ & & B & A & C \\ & & & O & O & O \end{pmatrix}。$$

其中

$$\begin{aligned} A_{00} &= \begin{pmatrix} \bar{p} & 0 \\ \alpha_0 \bar{p} & \alpha_0 \bar{p} \end{pmatrix}, A_{01} = \begin{pmatrix} p\bar{\theta} & p\theta \\ 0 & p \end{pmatrix}, \\ A_{01} &= \begin{pmatrix} \mu_v \bar{p} & 0 \\ 0 & \mu_b \bar{p} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & \mu_v \bar{p} \\ 0 & \mu_b \bar{p} \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} \bar{\theta} p \mu_v & \mu_v p + \bar{\theta} \mu_v \bar{p} \\ 0 & p \mu_b + \bar{p} \mu_b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} p \mu_v \bar{\theta} & p \mu_v \theta \\ 0 & p \mu_b \end{pmatrix}。 \end{aligned}$$

由 $\tilde{P}$ 的形式知, $\{(Q_n, J_n), n \geq 0\}$ 为带边界的拟生灭链。在此模型中, 矩阵方程

$$R^2 B + RA + C = R \quad (1)$$

的最小非负解 R 起着非常重要的作用, 称为率阵。

为表出 R , 记 $\alpha = \frac{p \mu_b}{p \mu_b}$ 。

定理 1 当 $\alpha < 1$, 即 $p < \mu_b$ 时, 矩阵方程(1)有最小非负解

$$R = \begin{pmatrix} r & \frac{p(r + \theta \beta_0)}{p \mu_b (1 + \theta \beta_0)} \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{式(2)中 } r = \frac{\bar{p} \mu_v \bar{\theta}}{1 - \bar{\theta} p \mu_v}, \beta_0 = \frac{\bar{\mu}_v}{\mu_v}。$$

证明 A, B, C 都是上三角矩阵, 可知最小非负解 R 的形式也为上三角矩阵, 设

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}。$$

带入式(1)即得 R , 其中 $r_{11} = \frac{p \mu_v \bar{\theta}}{1 - \bar{\theta} p \mu_v} < 1, r_{12} =$

$$\frac{p(r + \theta \beta_0)}{p \mu_b (1 + \theta \beta_0)}, r_{22} = \frac{p \mu_b}{p \mu_b}。$$

定理 2 Markov 链 $\{(Q_n, J_n), n \geq 0\}$ 正常返当且仅当 $\alpha < 1$ 。

证明 由矩阵几何解^[9]中可知, Markov 链 $\{(Q_n, J_n), n \geq 0\}$ 正常返。当且仅当 $S_p(R) < 1$, 即 $\alpha < 1$ 并且线性方程 $(x_0, x_1) B[R] = (x_0, x_1)$ 有正解, 这里

$$B[R] = \begin{pmatrix} \bar{p} & 0 & p\bar{\theta} & p\theta \\ \alpha_0 \bar{p} & \alpha_0 \bar{p} & 0 & p \\ \mu_v \bar{p} & 0 & \bar{\theta} p \mu_v & p + \bar{\theta} p \mu_v \\ 0 & p \mu_b & 0 & 1 - p \mu_b \end{pmatrix}。$$

显然, $B[R]$ 为随机阵, 这就确保以 $B[R]$ 为系数的齐次方程组有正解, 取 (x_0, x_1) 为 $B[R]$ 的平稳概率向量即可。

2 队长的稳态分布

设 (Q_v, J) 表示 $\{(Q_n, J_n), n \geq 0\}$ 的稳态极限, 将 (Q_v, J) 的平稳分布记为 $(\pi_0, \pi_1, \pi_2 \cdots)$ 。

其中 $\pi_k = (\pi_{k0}, \pi_{k1}), k \geq 0$, 并且

$$\pi_{kj} = P(Q_v = k, J = j) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n = k, J_n = j), (k, j) \in \Omega。$$

定理 3 当 $\alpha < 1$, 即 $p < \mu_b$ 时, (Q_v, J) 的联合概率分布为:

$$\begin{cases} \pi_{00} = K^* \\ \pi_{01} = \left(\frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{u_v \bar{p}r}{u_v} \right) K^* \\ \pi_{10} = \frac{r}{u_v} K^* \\ \pi_{11} = K K^* \\ \pi_{k0} = \frac{r^k}{u_v} K^*, k \geq 1 \\ \pi_{k1} = \left[\frac{\alpha^{k-1} - r^{k-1}}{\alpha - r} \frac{p(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}u_b(1 + \theta\beta_0)} \frac{r}{u_v} + \alpha^{k-1} K \right] K^*, k \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{式(3)中 } \beta_0 &= \frac{\bar{u}_v}{u_v}, K = \frac{1 - \alpha_0 \bar{p}}{u_b \bar{p}} \left(\frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{u_v \bar{p}r}{u_v} \right), \\ K^* &= \left\{ 1 + \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{r}{\mu_v} \left[\mu_v \bar{p} - \frac{1}{1-r} + \frac{p(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}\mu_b(1 + \theta\beta_0)(1-r)(1-\alpha)} \right] + K \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

证明 用矩阵几何解方法可得

$$\begin{aligned} \pi_k &= \pi_1 R^{k-1} = (\pi_{10}, \pi_{11}) R^{k-1}; k \geq 1 \\ (\pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11}) B[R] &= (\pi_{00}, \pi_{01}, \pi_{10}, \pi_{11}) \circ. \end{aligned} \quad (4)$$

将 $B[R]$ 代入上式,得到下列方程组:

$$\begin{cases} p\pi_{00} = \alpha_0 \bar{p}\pi_{01} + \mu_v \bar{p}\pi_{10} \\ (1 - \alpha_0 \bar{p})\pi_{01} = \mu_b \bar{p}\pi_{11} \\ (1 - \theta p \mu_v)\pi_{10} = p \theta \pi_{00} \\ \mu_b \bar{p}\pi_{11} = p \theta \pi_{00} + p \pi_{01} + (p + \theta \mu_v \bar{p})\pi_{10} \end{cases} \quad (5)$$

取 π_{00} 为常数,由式(5)的第三个方程得:

$$\pi_{10} = \frac{p \theta}{1 - \theta p \mu_v} \pi_{00} = \frac{r}{\mu_v} \pi_{00} \circ$$

由式(5)的第一个方程得:

$$\pi_{01} = \left(\frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\mu_v \bar{p}r}{\mu_v} \right) \pi_{00} \circ$$

由式(5)的第二个方程得:

$$\pi_{11} = \frac{1 - \alpha_0 \bar{p}}{\bar{p}\mu_b} \left(\frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\mu_v \bar{p}r}{\mu_v} \right) \pi_{00} \circ$$

由式(2)和式(4)得:

$$\pi_{k0} = r^{k-1} \pi_{00} = \frac{r^k}{\mu_v} \pi_{00},$$

$$\pi_{k1} = \left[\frac{\alpha^{k-1} - r^{k-1}}{\alpha - r} \frac{p(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}\mu_b(1 + \theta\beta_0)} \frac{r}{u_v} + \alpha^{k-1} K \right] K^* +$$

$$\alpha^{k-1} \frac{1 - \alpha_0 \bar{p}}{\bar{p}\mu_b} \left(\frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\mu_v \bar{p}r}{\mu_v} \right) \pi_{00} \circ$$

由归一化方程 $\pi_0 e + \pi_1 (I - R)^{-1} e = 1$ 可求得:

$$\pi_{00} = \left\{ 1 + \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{r}{\mu_v} \left[\mu_v \bar{p} - \frac{1}{1-r} + \frac{p(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}\mu_b(1 + \theta\beta_0)(1-r)(1-\alpha)} \right] + K \right\}^{-1} \Delta = K^* \circ$$

由式(3)我们很容易得到稳态下系统中各个状态的概率:

$$\begin{aligned} P\{J = 0\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k0} = \left[1 + \frac{r}{\mu_v(1-r)} \right] K^*; \\ P\{J = 1\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi_{k1} = \left[\frac{pr(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}\mu_b\mu_v(1 + \theta\beta_0)(1-r)(1-\alpha)} + \frac{K}{1-\alpha} \right] K^*; \\ \pi_{01} &= \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{r\mu_v \bar{p}}{\mu_v}. \end{aligned}$$

从而得到队长的概率母函数

$$\begin{aligned} Q(z) &= \left\{ 1 + \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\mu_v \bar{p}r}{\mu_v} + \left[K + \frac{pr(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}\mu_b\mu_v(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{z}{1 - z\alpha} \left[1 - \frac{p(r + \theta\beta_0)}{\bar{p}\mu_b(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{zr}{\mu_v(1 - zr)} \right\} K^*. \end{aligned}$$

3 队长和逗留时间的随机分解结构

定理 4 当 $\alpha < 1$ 时,且 $\mu_b > \mu_v$ 时,队长 Q 可分解为两个独立随机变量之和: $Q = Q_0 + Q_d$, 其中 Q_0 是经典无休假 Geom/Geom/1 排队模型中稳态顾客数,服从参数为 $1 - \alpha$ 的几何分布;由工作休假,延迟休假和休假可中止引起的附加队长 Q_d 的概率母函数为:

$$Q_d(z) = \left[\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 \frac{z(1-r)}{1-rz} \right] K^* \circ$$

其中

$$\delta_0 = \left(1 + \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\mu_v \bar{p}r}{\mu_v} \right) \frac{1}{1-\alpha};$$

$$\delta_1 = \left[K + \frac{pr(r + \theta\beta_0)}{p\bar{\mu}_v \mu_b(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{1}{1 - \alpha} - \left[1 + \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\bar{\mu}_v \bar{p}r}{\mu_v} + \frac{1}{\mu_v} - \frac{p(r + \theta\beta_0)}{p\bar{\mu}_v \mu_b(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{\alpha}{1 - \alpha};$$

$$\delta_2 = \left[1 - \frac{p(r + \theta\beta_0)}{p\bar{\mu}_b(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{\alpha}{\bar{\mu}_v(1 - \alpha)(1 - r)}.$$

证明 由第2节知道,队长的概率母函数为:

$$Q(z) = \frac{1 - \alpha}{1 - z\alpha} \left\{ \left(1 + \frac{p}{\alpha_0 p} - \frac{\bar{\mu}_v \bar{p}r}{\mu_v} \right) \frac{1 - z\alpha}{1 - \alpha} + \left[K + \frac{pr(r + \theta\beta_0)}{p\bar{\mu}_v \mu_b(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{z}{1 - \alpha} + \left[1 + \frac{p(r + \theta\beta_0)}{p\bar{\mu}_b(1 + \theta\beta_0)(\alpha - r)} \right] \frac{rz(1 - z\alpha)}{\bar{\mu}_v(1 - \alpha)(1 - rz)} \right\}.$$

$$K^* = \frac{1 - \alpha}{1 - z\alpha} \left[\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 \frac{z(1 - r)}{1 - rz} \right] K^*.$$

可以证实, $K^* = (\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)^{-1}$, $Q_d(z)$ 确是一个概率母函数,系统中的平均顾客数是:

$$E(Q) = E(Q_0) + E(Q_d) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} + K^* \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{1 - r} \right).$$

记 W 和 $W(s)$ 分别为稳态下逗留时间及其母函数,为了分析母函数,我们有如下关系^[10]。 $Q(z) = W(\bar{p} + pz)$ 。在经典无休假的 Geom/Geom/1 排队中,顾客逗留时间的母函数为^[10]:

$$W_0(s) = \frac{s(1 - \lambda)}{1 - s\lambda}, \text{ 其中 } \lambda = \frac{\bar{\mu}_b}{p} \quad (6)$$

定理 5 当 $\alpha < 1$, 且 $\mu_b > \mu_v$ 时,稳态下系统中顾客的逗留时间可以分解为两个独立随机变量之和 $W = W_0 + W_d$ 。其中 W_0 是经典无休假 Geom/Geom/1 模型中顾客的逗留时间,式(6)为其母函数表达式;延迟休假以及休假可中止引起的附加延迟时间 W_d 的母函数为^[4]:

$$W_d(s) = \left[\delta_1 p^{-1} + \delta_2 p^{-1} (1 - \bar{p}\sigma) \right] \frac{(1 - \sigma)}{1 - s\sigma} K^*.$$

从而有 $W(s) = W_0(s) W_d(s)$, 其中 $\sigma = \frac{r}{p + rp}$,

$$1 - \sigma = \frac{p(1 - r)}{p + rp}.$$

我们可以得到逗留时间的期望为:

$$E(W_d) = K^* \gamma_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}, E(W) = \frac{1}{\mu_b(1 - \alpha)} + K^* \gamma_1 \frac{\sigma}{1 - \sigma}.$$

其中 $\gamma_1 = \delta_2 p^{-1} (1 - \bar{p}\sigma)$ 。

本文是在文献[4]的基础上,加了一个延迟休假和休假可中止的策略。从定理4和定理5的结果表明,虽然队长和逗留时间的母函数在形式上与文献[4]一致,但是这个策略还是会影响到系统中顾客数和顾客的逗留时间。

参考文献

- 1 Servi L D, Finn S G. M/M/1 queue with working vacations (MYMM/M/1/WVMM). Perform Evaluation, 2002;50: 41—52
- 2 Li Jihong, Tian Naishuo. The M/M/1 Queue with Working Vacations and Vacation Interruptions. Syst Sci Syst Eng, 2007;16(1):121—127
- 3 Li J, Tian N. Performance analysis of GI/M/1 queue with multiple working vacations and vacation interruption. J. APPLIED Mathematical Modeling, 2008; 32(12): 2715—2730
- 4 Tian N, Ma Z, Liu M. The discrete-time Geom/Geom/1 queue with multiple working vacations. Appli Math Mode, 2008; 32:2941—2953
- 5 Li Jihong, Tian Naishuo, Ma Zhanyou. Performance Analysis of GI/M/1 Queue with Working Vacations and Vacation Interruption. Applied Mathematical Modeling, 2008;32(12):2715—2730
- 6 朱翼隼,石秀闯. M/G/1 工作休假和休假中止排队. 运筹与管理, 2008;17(4):67—71
- 7 潘小春,朱翼隼. 带启动期的 Geom/Geom/1 可中止工作休假排队. 河南科技大学学报, 2011;32(2):63—67
- 8 田乃硕,徐秀丽,马占友. 离散时间排队论. 北京,科学出版社, 2008
- 9 Netus M. Matrix-geometric solution stochastic models. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981
- 10 Hunter J J. Mathematical techniques of applied probability//discrete-time models; techniques and applications. New York: Academic Press, 1983

The Geom/Geom/1 Queue with Delayed Vacation and Vacation Interruptions

SHI Hai-yan¹, WEI Chun²

(Capital Normal University¹, Beijing 100048, P. R. China; Shanxi Datong University², Datong 037000, P. R. China)

[Abstract] A Geom/Geom/1 queue with delayed vacation and vacation interruptions is studied. Even if the server has completed all customers, it does not immediately enter working vacation. Only when there are no customers during the delayed vacation, the server begins a working vacation. Vacation interruption policy during the working vacation is also introduced. Using quasi-birth-and-death process and matrix-geometric solution method, the steady-state distributions for queue length and the probability generating function are given. Then the stochastic decomposition structure of queue length and sojourn time in the stationary state is gained and obtained the distributions for additional queue length and additional delay time.

[Key words] delayed vacation vacation interruption matrix-geometric solution stochastic decomposition

(上接第 6524 页)

Adaptive Synchronization of Perturbed Chen's Fractional-order Chaotic Systems *via* Adaptive Feedback Control

PENG Yan-yan, LI Shu-min, HE Shu-xia

(Department of Applied Mathematics, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China)

[Abstract] The adaptive synchronization between one fractional-order Chen's systems with partly perturbed parameters and the drive system are investigated. Based on the ideas of feedback control and stability theory of fractional-order systems, synchronization between these two chaotic systems is achieved by proposing a new adaptive feedback controller and a parameter estimation update law. Numerical simulations are presented to demonstrate the analytical results.

[Key words] adaptive feedback control chaos synchronization adaptive synchronization