



数学

一类随机保费下双险种风险模型的破产分布

乔克林 侯致武

(延安大学数学与计算机科学学院, 延安 716000)

摘要 研究了一类随机保费下带常利率的特殊双险种风险模型的破产问题,得到了该模型下破产概率和生存概率的递推表达式及所满足的积分方程。

关键词 常利率 双险种 风险模型 破产概率 生存概率

中图法分类号 O211.9; **文献标志码** A

随着金融市场的不断繁荣和发展,在保险公司的实际经营中,一方面由于生活环境、经济环境的变化,赔付发生次数的强度可能是随机的。比如地震、火灾、传染性疾病和交通事故中可能引发伤亡等;另一方面由于竞争、利率等因素的影响,不同单位时间所收取的保费常常不一样。因此,同时考虑利率、保费及保费收取时间随机的多险种风险模型更具有重要的实际应用价值。文献[1]研究了随机保费率但没考虑利率,且保费收取时间线性的风险模型;文献[2]讨论了考虑利率和保费随机收取但保费率为常数的单险种风险模型;文献[3]研究了利率及保费率都随机,但保费收取时间线性的风险模型,并推导出一些精算量的具体表达式;文献[4]讨论了含利率和通货膨胀率,但没直接考虑保费率的离散时间风险模型下的若干递推公式;文献[5, 6]研究了常利率但保费率固定的双险种离散时间风险模型的破产问题;文献[7]中同时考虑了利率、

并且保费及保费收取时间都为随机的情况下,建立了一类可能发生两种索赔的双险种风险模型,并用鞅方法讨论了破产概率上界。本文将继续在文献[7]给出的模型下用递推方法研究破产概率和生存概率的表达式及所满足的积分方程。

1 风险模型简介

以下所涉及的随机过程和随机变量都定义在同一个完备的概率空间 $(\Omega, \bar{F}, P)$ 上,假定:

- (1) u 表示保险公司的初始资金;
- (2) $\delta \geq 0$ 表示连续复利率^[8];
- (3) $\{K_i, i \geq 0\}$ 表示第 i 个保单到达的时间(其中 $K_0 = 0$), $\{X_i, i \geq 1\}$ 表示保单到达的时间间隔序列,并且有 $X_i = K_i - K_{i-1}$, 则到 t 时刻为止保单的总份数为计数过程 $M(t) = \sup\{i \geq 1, K_i = \sum_{j=1}^i X_j \leq t\}$, 其分布函数为 $F_M(m)$ 。 $\{C_i, i \geq 1\}$ 表示保费额序列, $\{X_i\}$ 与 $\{C_i\}$ 均为独立同分布的非负随机变量序列且彼此相互独立,其分布函数分别记为 $F_X(x)$ 和 $F_C(c)$;
- (4) $\{T_j, j \geq 0\}$ 表示第 j 次索赔发生的时间(其

中 $T_0=0$), $\{Y_j, j \geq 1\}$ 表示两次索赔发生的时间间隔序列, 其分布函数为 $G(t)$ 。并且有 $Y_j = T_j - T_{j-1}$,

$T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, 则到 t 时刻为止理赔的总次数为计数

过程 $N(t) = \sup \{j \geq 1, T_j \leq t\}$;

(5) 当保险索赔发生时, 假设以下三类索赔事件有且仅有一类将发生:

- ①只发生第一类险种的索赔;
- ②只发生第二类险种的索赔;
- ③两类索赔都发生。

以上三类事件发生的概率分别为 p_1, p_2, p_3 , 显然 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 。

设第一类险种的索赔额 Z_1 , 服从分布函数 $H_1(z)$; 第二类险种的索赔额 Z_2 , 服从分布函数 $H_2(z)$; 第三类事件的索赔额应服从分布函数 $H_1 H_2(z)$, 且 Z_1, Z_2 是相互独立的。设 $D_j = Z_{1j} \delta_1 + Z_{2j} \delta_2 + (Z_{1j} + Z_{2j}) \delta_3$ 为保险的第 j 次理赔额, 其中 k 为 0—1 随机变量, $\delta_k = 1$ 表示第 k 类事件发生, 而且对于每次索赔有且仅有一个 $\delta_k = 1$ 。它发生的概率为 $P(\delta_k = 1) = p_k, k = 1, 2, 3$ 。 Z_{ij} 表示第 i 类险种在第 j 次索赔时的索赔额 ($i = 1, 2$), 且相互独立。用 D 表示任意的 D_j , 由全概率公式知 D 的分布函数为: $H(d) = p_1 H_1(d) + p_2 H_2(d) + p_3 H_1 H_2(d)$ 。在不考虑各随机量具体分布的情况下, 本问题中也可把索赔额笼统的记为 D , 其分布函数为 $H(d)$;

(6) $\{X_i\}, \{Y_j\}, \{C_i\}$ 和 $\{D_j\}$ 相互独立, 且与 $M(t), N(t)$ 相互独立。

满足以上条件的风险模型可以表示为:

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^{M(t)} C_i e^{\delta(t-K_i)} - \sum_{j=1}^{N(t)} D_j e^{\delta(t-T_j)} \quad (1)$$

模型(1)在 T_n 时刻的盈余过程可以表示为:

$$U_\delta(T_n) = ue^{\delta T_n} - \sum_{j=1}^n W_j e^{\delta(T_n - T_j)}。$$

其中: $W_j = D_j - \sum_{i=M(T_{j-1})+1}^{M(T_j)} C_i e^{\delta(T_j - K_i)}, j \geq 1$ 。

易知 $\{(W_j, Y_j), j \geq 1\}$ 是独立同分布序列, 设联合分布函数为 $W(w, s)$, 即

$$W(w, s) = P(W_1 = D_1 - \sum_{i=1}^{M(Y_1)} C_i e^{\delta(Y_1 - K_i)} \leq w, Y_1 \leq s) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^s P(D_1 \leq w + \sum_{i=1}^{M(t)} C_i e^{\delta(t-K_i)} | Y_1 = t) dG(t) = \\ & \int_0^s \int_0^\infty P(D_1 \leq w + \sum_{i=1}^m C_i e^{\delta(t-K_i)} | M(t) = m) \times \\ & dF_M(m) dG(t) = \int_0^s \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t P(D_1 \leq w + \\ & \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} |_{\substack{K_i = t_i, \dots, K_m = t_m \\ C_i = c_i, \dots, C_m = c_m}}) \times dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, \\ & t_m) dF_{C_1}(c_1) \cdots dF_{C_m}(c_m) dF_M(m) dG(t) = \\ & \int_0^s \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t H(w + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}) \times \\ & dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_{C_1}(c_1) \cdots dF_{C_m}(c_m) dF_M(m) dG(t)。 \\ & dW(w, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t dH(w + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}) \times \\ & dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_{C_1}(c_1) \cdots dF_{C_m}(c_m) dF_M(m) dG(t) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中: $F_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m)$ 为 $0 < K_1 < \dots < K_m < t$ 的联合分布函数。

2 破产概率与生存概率

记 $T = \inf(t \geq 0; U_\delta(t) < 0)$ (若集合为空集, 则 $T = \infty$) 为模型(1)的破产时刻。

$\varphi_\delta(u) = P(T < \infty | U_\delta(0) = u)$ 为模型(1)在初始资金为 u 下的破产概率;

$\psi_\delta(u)$ 为模型(1)在初始资金为 u 下的生存概率, 则有

$$\psi_\delta(u) = 1 - \varphi_\delta(u) \quad (3)$$

定理 1 保险公司的破产概率为

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(u) &= \sum_{n=1}^\infty I_n(u), \text{ 其中} \\ I_1(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t \bar{H}(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}) \times \\ & dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_{C_1}(c_1) \cdots dF_{C_m}(c_m) \times \\ & dF_M(m) dG(t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} I_n(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} I_{n-1} \times \\ & (ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, \\ & t_m) dF_{C_1}(c_1) \cdots dF_{C_m}(c_m) dF_M(m) dG(t); n \geq 2 \end{aligned} \quad (5)$$

证明 破产只可能发生在理赔发生的时刻, 由

$\varphi_{\delta}(u)$ 的定义有

$$\begin{aligned} \varphi_{\delta}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T = T_n | U_{\delta}(0) = u) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} P(U_{\delta}(T_1) > 0, U_{\delta}(T_2) > 0, \dots, \\ &U_{\delta}(T_{n-1}) > 0, U_{\delta}(T_n) < 0 | U_{\delta}(0) = u) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} I_n(u) \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)中

$I_n(u) = P(U_{\delta}(T_1) > 0, U_{\delta}(T_2) > 0, \dots, U_{\delta}(T_{n-1}) > 0, U_{\delta}(T_n) < 0 | U_{\delta}(0) = u)$ 表示保险公司在 T_n 时刻破产的概率分布,由定义有

$$\begin{aligned} I_1(u) &= P(U_{\delta}(T_1) < 0 | U_{\delta}(0) = u) = P(ue^{\delta Y_1} - \\ &W_1 < 0 | U_{\delta}(0) = u) = \int_0^{\infty} \int_{ue^{\delta t}}^{\infty} P(ue^{\delta t} - \\ &w < 0 | W_1 = w, Y_1 = t) dW(w, t) = \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_{ue^{\delta t}}^{\infty} dH\left(w + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}\right) \times \\ &dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_C(c_1) \dots dF_C(c_m) \times \\ &dF_M(m) dG(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \bar{H}\left(ue^{\delta t} + \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}\right) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_C(c_1) \times \\ &\dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t)。 \end{aligned}$$

其中: $\bar{H}(z) = 1 - H(z)$ 。第 4 个等号用到了式(2)并交换了积分次序。

$$\begin{aligned} I_2(u) &= P(U_{\delta}(T_1) > 0, U_{\delta}(T_2) < 0 | U_{\delta}(0) = u) = \\ &\int_0^{\infty} \int_{-\sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}}^{ue^{\delta t}} P(ue^{\delta t} - w > 0, ue^{\delta(t+Y_2)} - e^{\delta Y_2} w - W_2 < \\ &0 | W_1 = w, Y_1 = t) dW(w, t) = \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_{-\sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}}^{ue^{\delta t}} P((ue^{\delta t} - w) \times \\ &e^{\delta Y_2} - W_2 < 0) dH\left(w + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}\right) dF_{K_1 \dots K_m} \times \\ &(t_1, \dots, t_m) dF_C(c_1) \dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) = \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} I_1\left(ue^{\delta t} + \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w\right) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) \times \\ &dF_C(c_1) \dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t)。 \end{aligned}$$

由数学归纳法得到,当 $n \geq 3$ 时有

$$\begin{aligned} I_n(u) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} I_{n-1}\left(ue^{\delta t} + \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w\right) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) \times \\ &dF_C(c_1) \dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t)。 \end{aligned}$$

证毕。

推论 1 保险公司的破产概率 $\varphi_{\delta}(u)$ 满足如下积分方程:

$$\begin{aligned} \varphi_{\delta}(u) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t [\bar{H}(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}) + \\ &\int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} \varphi_{\delta}(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - \\ &w) dH(w)] dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_C(c_1) \dots \\ &dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) \end{aligned} \quad (7)$$

证明 由式(4)、式(5)和式(6)有

$$\begin{aligned} \varphi_{\delta}(u) &= I_1(u) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} I_{n-1} \times \\ &(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, \\ &t_m) dF_C(c_1) \dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) = I_1(u) + \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} \sum_{n=2}^{\infty} I_{n-1}(ue^{\delta t} + \\ &\sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_C(c_1) \times \\ &\dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) = \\ &\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t [\bar{H}(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}) + \\ &\int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} \varphi_{\delta}(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w)] \times \\ &dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, t_m) dF_C(c_1) \dots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t)。 \end{aligned}$$

故保险公司的破产概率满足积分方程式(7)。证毕。

推论 2 保险公司的生存概率为

$$\psi_{\delta}(u) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} I_n(u)。 \quad (8)$$

且 $\psi_{\delta}(u)$ 满足如下积分方程:

$$\begin{aligned} \psi_{\delta}(u) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^t \dots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} \psi_{\delta}(ue^{\delta t} + \\ &\sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w) dF_{K_1 \dots K_m}(t_1, \dots, \end{aligned}$$

$$t_m) dF_C(c_1) \cdots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) \quad (9)$$

证明 由定理 1 及式(3)易知式(8)成立。下证式(9)成立。由推论 1 及式(3)有

$$\begin{aligned} \psi_\delta(u) &= 1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t \{ \bar{H}(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}) + \\ &\int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} [1 - \psi_\delta(ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w)] dH(w) \} \times \\ &dF_{K_1 \cdots K_m}(t_1, \cdots, t_m) dF_C(c_1) \cdots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) = \\ &1 - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t [1 - \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} \psi_\delta(ue^{\delta t} + \\ &\sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w)] dF_{K_1 \cdots K_m}(t_1, \cdots, t_m) \times \\ &dF_C(c_1) \cdots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t) = \\ &\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^t \cdots \int_{t_{m-1}}^t \int_0^{ue^{\delta t} + \sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)}} \psi_\delta(ue^{\delta t} + \\ &\sum_{i=1}^m c_i e^{\delta(t-t_i)} - w) dH(w) dF_{K_1 \cdots K_m} \times \\ &(t_1, \cdots, t_m) dF_C(c_1) \cdots dF_C(c_m) dF_M(m) dG(t)。 \end{aligned}$$

即保险公司的生存概率满足积分方程式(9)。

证毕。

参 考 文 献

- 1 蔡高玉, 耿显民. 一类随机保费率下的风险模型. 应用数学与计算数学学报, 2007; 21(1): 27—33
- 2 徐 娜, 赵明清. 考虑利率和保费随机收取的风险模型. 统计与决策, 2008; (12): 33—34
- 3 俞雪梨, 肖纲景. 随机利率离散时间风险模型的破产问题. 应用概率统计, 2009; 25(1): 38—46
- 4 高明美, 赵明清, 李述山. 一个离散时间风险模型的若干递推公式. 山东科技大学学报(自然科学版), 2004; 23(3): 104—107
- 5 马丽娟, 左艳芳. 常利率环境下双险种离散时间风险模型的破产问题. 云南民族大学学报(自然科学版), 2009; 18(3): 218—222
- 6 杨善兵, 司健东. 常利率下两险种的风险模型的破产概率. 安徽大学学报: 自然科学版, 2006; 30(1): 7—10
- 7 乔克林, 李粉香, 任芳玲. 带利率的特殊双险种风险模型的破产概率. 经济数学, 2009; 26(4): 84—90
- 8 刘占国. 利息理论. 天津: 南开大学出版社, 2000

Ruin Distributions of a Double Type-insurance Risk Model with Random Premium

QIAO Ke-lin, HOU Zhi-wu

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, P. R. China)

[Abstract] A special double-insurance type risk model whose premium is a stochastic process with constant interest was studied. Under the model, the recursive formulas and its integral equations of the distribution of ruin probabilities and live probabilities are obtained.

[Key words] interest rate double type-insurance risk model ruin probabilities live probabilities