

任意多面体重心及积分的精确算法

武艳强¹ 陈光齐^{1,2} 江在森¹

(中国地震局地震预测研究所¹, 北京 100036; 日本九州大学², 福岡 8160000)

摘要 通过对三维单纯形积分公式的分析给出了其伪代码实现,并结合具体实例描述了其求解过程,给出了任意形状多面体重心计算方法。利用上述算法,对比了中空规则形状多面体重心的计算值与理论值差异,分析了不同边长比(10^{-4} — 10^4)情况下计算值与理论值的差异,讨论了计算结果的精度。通过非规则形状多面体重心计算结果的稳定性分析,讨论了单纯形积分的普适性特征。结果表明,积分和重心的计算值与理论值的相对误差约为 10^{-15} — 10^{-14} ,图形条件对积分结果的影响极小且不存在系统性。因此,单纯形积分结果具有高度的稳定性和精确性。

关键词 任意形状多面体 单纯形积分 重心问题 图形条件

中图法分类号 O186.5; **文献标志码** A

在工程应用和力学模拟中经常涉及到三维领域的多项式积分问题,比如有限元模拟中单元刚度矩阵(龙驭球,1988)^[1]、非连续变形分析(DDA)和数值流形方法(NMM)中的惯性矩阵(Chen,1997; Shi,1984,1992,1996,2001;姜冬茹,2002;骆少明,2005;石根华,1997;郑榕明,2004)^[2-10]。考虑到实际问题中涉及的积分区域多为复杂的多面体,通常的解决办法是把复杂形状的多面体划分成规则的几何单元后,采用数值积分方法求解;比如高斯积分方法(封建湖,2001)^[11]。因此,能否用一种简单的方法直接从整体上求解复杂区域的多项式积分是值得研究的。石根华(1997)^[9]给出了 N 维单纯形积分的公式,在此基础上林绍忠(2005)^[12]给出了单纯形积分的递推公式。但两位学者给出的公式表述形式较为复杂,需要有具体的算法实现才有利于单纯形积分方法的推广。

本文通过对经典单纯形积分公式(石根华,1997)的分析^[9],给出了三维单纯形积分的伪代码,

在此基础上给出了任意多面体重心及积分算法。利用上述算法,通过对中空规则形状和非规则形状积分区域下体积和重心理论值与计算值的对比分析,讨论了单纯形积分结果的精确性和普适性。同时,通过对比不同边长比(10^{-4} — 10^4)情况下计算结果的分析,讨论了积分区域图形条件对积分结果的影响。

1 三维单纯形积分的基本原理及算法实现

石根华(1997)^[9]给出了 N 维单纯形积分的通用公式,参考林绍忠(2005)^[12]对单纯形积分公式的描述,公式(1)直接给出了三维单纯形积分表达式。

$$\iiint_V x^l y^m z^n dx dy dz = J \frac{l!m!n!}{(l+m+n+3)!} \times \left(\sum_{i_{x0}, i_{x1}, i_{x2}, i_{x3} \geq 0} \frac{x_0^{i_{x0}} x_1^{i_{x1}} x_2^{i_{x2}} x_3^{i_{x3}}}{i_{x0}! i_{x1}! i_{x2}! i_{x3}!} \times \sum_{i_{y0}, i_{y1}, i_{y2}, i_{y3} \geq 0} \frac{y_0^{i_{y0}} y_1^{i_{y1}} y_2^{i_{y2}} y_3^{i_{y3}}}{i_{y0}! i_{y1}! i_{y2}! i_{y3}!} \times \sum_{i_{z0}, i_{z1}, i_{z2}, i_{z3} \geq 0} \frac{z_0^{i_{z0}} z_1^{i_{z1}} z_2^{i_{z2}} z_3^{i_{z3}}}{i_{z0}! i_{z1}! i_{z2}! i_{z3}!} (i_0! i_1! \times i_2! i_3!) \right) = JA(l, m, n) \times \left(\sum_{i_{x0}, i_{x1}, i_{x2}, i_{x3} \geq 0} X(i_{x0}, i_{x1}, i_{x2}, i_{x3}) \times \right.$$

2011年6月7日收到 国家自然科学基金(40974005)和日本JSPS
科研费(基盘研究(B),22310113,G.Chen)联合资助
第一作者简介:武艳强,男,河北省承德县人,中国地震局预测研究所副研究员。理学硕士,中国地震局地质研究所博士生,研究方向:大地测量数据处理与分析。E-mail:chdqyw@126.com。

$$\sum_{\substack{i_{y0}+i_{y1}+i_{y2}+i_{y3}=m \\ i_{y0}, i_{y1}, i_{y2}, i_{y3} \geq 0}} Y(i_{y0}, i_{y1}, i_{y2}, i_{y3}) \times \sum_{\substack{i_{z0}+i_{z1}+i_{z2}+i_{z3}=n \\ i_{z0}, i_{z1}, i_{z2}, i_{z3} \geq 0}} Z(i_{z0}, i_{z1}, i_{z2}, i_{z3}) \times (i_0! i_1! i_2! i_3!) \quad (1)$$

表 1 三维单纯形积分伪代码

```
double simplex_integration_3d(double point_data[4]
[3], int l, int m, int n)
{
    // this function can be used to calculate
     $\iiint_V x^l y^m z^n dx dy dz$ 

    //point_data save the coordinates of vertexs of three-dimensional
    simplex.
    //define variables and set them initial values, which include as-
    sign point_data to a1[4], a2[4], a3[4], a4[4]
    jacobian_value=four_determinant(a1, a2, a3, a4);
    //calculate the value of J in Eq. (1)
    //calculate the value of J * A(l, m, n) in Eq. (1)
    d1=jacobian_value * factorial(l) * factorial(m) * factorial(n)/
    factorial(l+m+n+3);
    //calculate the result of three-dimensional simplex integration
    for(ix0=0; ix0<=l; ix0++) {
        for(ix1=0; ix1<=l-ix0; ix1++) {
            for(ix2=0; ix2<=l-ix0-ix1; ix2++) {
                ix3=l-ix0-ix1-ix2;
                //calculate the value of X(ix0, ix1, ix2, ix3) and set it to dx
                for(iy0=0; iy0<=m; iy0++) {
                    for(iy1=0; iy1<=m-iy0; iy1++) {
                        for(iy2=0; iy2<=m-iy0-iy1; iy2++) {
                            iy3=m-iy0-iy1-iy2;
                            //calculate the value of Y(iy0, iy1, iy2, iy3) and set it to dy
                            for(iz0=0; iz0<=n; iz0++) {
                                for(iz1=0; iz1<=n-iz0; iz1++) {
                                    for(iz2=0; iz2<=n-iz0-iz1; iz2++) {
                                        iz3=n-iz0-iz1-iz2;
                                        //calculate the value of Z(iz0, iz1, iz2, iz3) and set it to dz
                                        //calculate the value of (i0! i1! i2! i3!) and set it to d2
                                        //calculate result of this step and add it to value
                                        value=value+d1 * dx * dy * dz * d2;

                                        }
                                    }
                                }
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
    return value; //return the final result
}
```

公式(1)中 $i_w = i_{xw} + i_{yw} + i_{zw}$ ($w = 0, 1, 2, 3$); J 为雅克比行列式(石根华, 1997)^[9], 在三维情况下

$$\text{有如下形式 } J = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, x_i, y_i, z_i \text{ 分别对应}$$

三维单纯形(四面体)的第 i 顶点的坐标。

从表现形式上看公式(1)比较复杂, 致使一些数值流形方法的研究者选择其它积分方法, 如姜冬茹等(2002)^[7]、骆少明等(2003)^[8]采用了 Hammer 积分方法, 郑榕明等(2004)^[10]采用了高斯积分方法。为了解决骆少明等(2003)^[8]提到的“单纯形积分的形式十分复杂, 不便于编制通用程序”的问题, 表 1 给出了三维单纯形积分的伪代码实现, 该代码经过简单变化并增加 4 阶行列式和阶乘函数即可方便转化成为 C、C++ 或 Fortran 代码, 进而实现多项式在三维单纯形上的积分运算。表 1 给出的算法仅对三维单纯形有效。要想实现任意形状积分区域的单纯形积分需要明确具体的积分流程。通过向石根华先生请教得到了任意形状多面体三维单纯形积分过程, 结合图 1 凹多面体说明其流程。图 1 中多面体积分的过程如下: ① 把多面体每个面的顶点按外法线方向逆时针排列, 即 $P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$ 、 $P_1 P_7 P_6$ 、 $P_6 P_7 P_5$ 、 $P_5 P_7 P_4$ 、 $P_4 P_7 P_3$ 、 $P_3 P_7 P_2$ 和 $P_2 P_7 P_1$; ② 任意选一点 P_0 , 此点可以位于多面体内部或外部, 如选在坐标原点, 则可简化雅克比行列式 J 的计算; ③ 以多面体的面为单位进行单纯形积分, 比如针对面 $P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$, 分别以 $P_0 P_1 P_2 P_3$ 、 $P_0 P_1 P_3 P_4$ 、 $P_0 P_1 P_4 P_5$ 和 $P_0 P_1 P_5 P_6$ 四个单纯形进行积分, 累加后完成该面的积分操作; ④ 按③的步骤完成其他面的积分操作, 全部累加后完成整个积分过程。

2 中空规则形状单纯形积分的精度分析

根据表 1 的算法和图 1 的计算流程, 我们可以计算出任意形状多面体的积分结果。为了分析积分结果的可靠性, 下面通过对图 2 中空规则多面体的体积和重心的计算结果与理论结果对比分析进行具体说明。公式(2)给出了体积和重心的计算公

式,式中 V 为多面体体积, X 、 Y 和 Z 多面体重心的三维坐标。

针对中空多面体的三维单纯形积分问题(图2),对于外表面形成的多面体采用图1的流程正常积分,内表面形成的多面体每个面的顶点按该面的内法线方向逆时针排列并进行积分,最后累加即可得到最终结果。图2中外表面形成的正六面体的长、宽、高分别为100、50和100,内表面形成的六面体为边长为50的正方体。根据上述信息可以计算出两个六面体的理论体积和重心,进而计算出填充部分的体积、重心 X 和 Y 。根据表1的算法和图1的计算流程,表2给出了图2中外表面形成的六面体、内表面形成的六面体和填充部分的体积和重心结果,其中 V 、 X 、 Y 和 Z 的含义与公式(2)一致。

$$\left\{ \begin{aligned} V &= \iiint_V 1 dx dy dz = \sum \text{simplex_integration_3d} \\ &\quad (\text{point_data}, 0, 0, 0) \\ X &= \frac{\iiint_V x dx dy dz}{V} = \frac{\iiint_V x dx dy dz}{\iiint_V 1 dx dy dz} = \\ &\quad \frac{\sum \text{simplex_integration_3d}(\text{point_data}, 1, 0, 0)}{\sum \text{simplex_integration_3d}(\text{point_data}, 0, 0, 0)} \\ Y &= \frac{\iiint_V y dx dy dz}{V} = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{\iiint_V 1 dx dy dz} = \\ &\quad \frac{\sum \text{simplex_integration_3d}(\text{point_data}, 0, 1, 0)}{\sum \text{simplex_integration_3d}(\text{point_data}, 0, 0, 0)} \\ Z &= \frac{\iiint_V z dx dy dz}{V} = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{\iiint_V 1 dx dy dz} = \\ &\quad \frac{\sum \text{simplex_integration_3d}(\text{point_data}, 0, 0, 1)}{\sum \text{simplex_integration_3d}(\text{point_data}, 0, 0, 0)} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

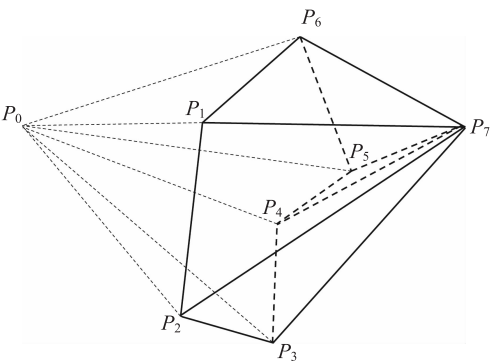


图1 凹多面体下单纯形积分示例

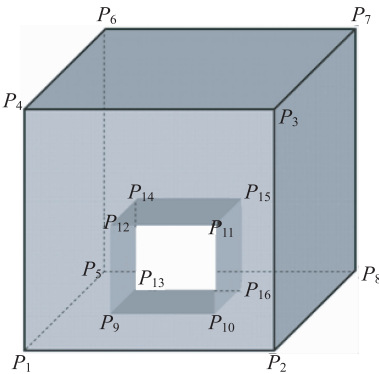


图2 中空规则形状下三维单纯形积分

表2结果表明理论结果与计算结果的差异很小,二者的差异出现在第16位有效数字。由于图2的规则图形的边长差异不大,下面通过调整边长比来研究图形条件对计算结果的影响(表3)。

表3结果表明图形条件对中空规则形状下三维单纯形积分结果的影响很小。由于只对 Z 坐标进行了尺度缩放,因此重心 X 、 Y 坐标应该保持不变,体积及重心 Z 随缩放尺度变化。表3中重心 X 、 Y 如果取14位有效数字,结果为 $V = 375\,000 \times scale$ 、 $X = 50$ 、 $Y = 175$ 和 $Z = 53.333\,333\,333\,333 \times scale$,相对误差约为 10^{-15} 。另外,重心 X 值、 Y 值不随 Z 坐标尺度的缩放呈系统性变化,即当 X 和 Y 尺度远大于 Z 尺度或 Z 尺度远大于 X 和 Y 尺度时,重心 X 和 Y 均保持稳定。面积和重心 Z 的结果也具有上述特性。由此可见,图形条件对三维单纯形积分结果的影响不具有系统性,其差异主要是由计算机的计算误差引起的。因此,可以初步确定三维单纯形积分具有高精度的特性。

表 2 中空规则形状下单纯形积分计算结果与理论结果对比

参数	外六面体	内六面体	填充区域
理论体积 V	500 000.000 000 000 00	125 000.000 000 000 00	375 000.000 000 000 00
计算体积 V	499 999.999 999 999 94	125 000.000 000 000 00	375 000.000 000 000 00
理论重心 X	50.000 000 000 000 000	50.000 000 000 000 000	50.000 000 000 000 000
计算重心 X	50.000 000 000 000 007	50.000 000 000 000 000	50.000 000 000 000 000
理论重心 Y	175.000 000 000 000 00	175.000 000 000 000 00	175.000 000 000 000 00
计算重心 Y	175.000 000 000 000 03	175.000 000 000 000 00	175.000 000 000 000 00
理论重心 Z	50.000 000 000 000 000	40.000 000 000 000 000	无法简单获取
计算重心 Z	50.000 000 000 000 007	40.000 000 000 000 000	53.333 333 333 333 336

表 3 图形条件对三维单纯形积分结果的影响分析

$Z \times scale$	Calculated V (Padding shape)	Calculated X (Padding shape)	Calculated Y (Padding shape)	Calculated Z (Padding shape)
$Z \times 10^{-4}$	37.499 999 999 999 993	50.000 000 000 000 000	175.000 000 000 000 03	0.005 333 333 333 333 336
$Z \times 10^{-3}$	375.000 000 000 000 00	49.999 999 999 999 979	174.999 999 999 999 97	0.053 333 333 333 333 34
$Z \times 10^{-2}$	3 750.000 000 000 001 4	50.000 000 000 000 000	174.999 999 999 999 97	0.533 333 333 333 333 1
$Z \times 10^{-1}$	37 499.999 999 999 993	50.000 000 000 000 000	175.000 000 000 000 03	5.333 333 333 333 334 8
$Z \times 10^0$	375 000.000 000 000 00	50.000 000 000 000 000	175.000 000 000 000 00	53.333 333 333 333 336
$Z \times 10^1$	3 750 000.000 000 001 4	50.000 000 000 000 000	174.999 999 999 999 97	533.333 333 333 333 03
$Z \times 10^2$	37 499 999.999 999 985	50.000 000 000 000 021	175.000 000 000 000 06	5 333.333 333 333 335 8
$Z \times 10^3$	375 000 000.000 000 12	49.999 999 999 999 986	174.999 999 999 999 94	53 333.333 333 333 314
$Z \times 10^4$	3 750 000 000.000 001 4	50.000 000 000 000 000	174.999 999 999 999 97	533 333.333 333 333 02

3 非规则形状单纯形积分的普适性分析

前面通过中空规则形状下单纯形积分结果理论值与计算值的对比分析,初步讨论了三维单纯形积分算法的有效性和精确性。为了分析该算法的普适性,下面对图 3 给出的非规则形状凹多面体进行体积和重心分析。由于图 3 的凹多面体的重心和体积没有理论结果可供对比,我们采用类似表 3 的分析思路来验证积分结果的可靠性。利用公式(2)及表 1 算法,可以方便的计算出图 3 凹多面体的体积和重心坐标,分别为 $V=76\,727.166\,666\,666\,7$ 、重心 $X=49.503\,344\,208\,809\,1$ 、重心 $Y=-1.961\,582\,381\,729\,2$ 、重心 $Z=28.775\,000\,000\,000\,0$ 。

通过对图 3 的 Y 进行尺度缩放,表 4 给出了体积及重心的计算结果,结果表明在非规则积分区域

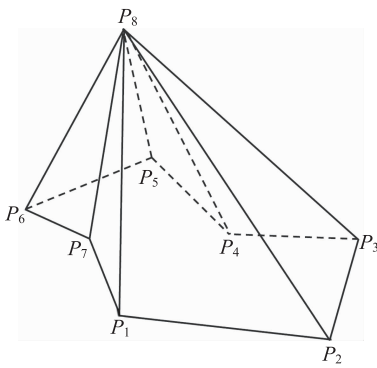


图 3 非规则形状下的单纯形积分

上述参数均表现出高精度特性。由于仅对 Y 坐标进行了尺度缩放,因此重心 X 、 Z 应该保持稳定,体积 V 和重心 Y 应该随 Y 坐标的缩放尺度发生变化。如果取 15 位有效数字,结果为
 $V=76\,727.166\,666\,666\,7 \times scale$,
 $X=49.503\,344\,208\,809\,1$,

$Y = -1.961\ 582\ 381\ 729\ 20 \times scale$ 和 $Z = 28.775\ 000\ 000\ 000\ 0$, 相对误差约为 10^{-15} 。另外, 重心 X 值、 Z 值不随 Y 坐标尺度的缩放呈系统性变化, 变化表现出随机特性。因此, 上述结果表明即使积分区域为非规则的凹多面体, 积分结果依然保持高稳定性和精确性, 并且图形条件对积分结果基本没有影响。

4 讨论与结论

本文主要采用多面体体积和重心为参数对三维单纯形积分的精确性进行了分析, 其中体积涉及 0 阶积分问题、重心涉及 1 阶积分问题, 体积和重心的高精确性反映了积分结果的精确性。对于高阶积分问题, 笔者也进行了相关研究(限于篇幅未在本文给出相应图表), 结果表明高阶积分结果同样保持高精确性。

(1) 通过本文给出的三维单纯形积分算法和流程可以实现高阶多项式在任意复杂多面体上的积分。该积分算法可以直接应用于三维 DDA(非连续变形分析)和三维 NMM(数值流形方法)的程序设计中(Chen, 1997; Shi, 1984, 1992, 1996, 2001)^[2]。

(2) 本文给出的多面体的体积和重心算法可以精确求解任意复杂多面体的体积和重心问题。该算法适合凹多面体、中空多面体, 具有高度的普适形和高精度性(相对误差为 10^{-15} 量级)。

(3) 通过图形条件对三维单纯形积分结果影响的分析, 结果表明即使尺度比从 10^{-4} 变化到 10^4 , 体积和重心结果依然维持稳定状态, 误差分布具有随机特性, 不依赖于尺度变化。由此表明结果误差主要来源于计算机的计算误差, 算法本身是高度稳定的。

致谢: 本文的研究得到了石根华先生的悉心指导, 在此表示感谢。

表 4 非规则形状下三维单纯形积分结果

$Y \times scale$	计算体积 V	计算重心 X	计算重心 Y	计算重心 Z
$Y \times 10^{-4}$	7.672 716 666 666 667 1	49.503 344 208 809 132	-0.000 196 158 238 172 920 09	28.774 999 999 999 999
$Y \times 10^{-3}$	76.727 166 666 666 648	49.503 344 208 809 139	-0.001 961 582 381 729 201 1	28.775 000 000 000 006
$Y \times 10^{-2}$	767.271 666 666 666 53	49.503 344 208 809 139	-0.019 615 823 817 292 023	28.774 999 999 999 999
$Y \times 10^{-1}$	7 672.716 666 666 667 2	49.503 344 208 809 146	-0.196 158 238 172 920 05	28.774 999 999 999 999
$Y \times 10^0$	76 727.166 666 666 657	49.503 344 208 809 125	-1.961 582 381 729 199 3	28.774 999 999 999 991
$Y \times 10^1$	767 271.666 666 666 63	49.503 344 208 809 125	-19.615 823 817 292 007	28.774 999 999 999 995
$Y \times 10^2$	7 672 716.666 666 666 0	49.503 344 208 809 132	-196.158 238 172 920 16	28.774 999 999 999 999
$Y \times 10^3$	76 727 166.666 666 657	49.503 344 208 809 146	-1 961.582 381 729 201 4	28.775 000 000 000 006
$Y \times 10^4$	767 271 666.666 666 63	49.503 344 208 809 125	-19 615.823 817 292 006	28.774 999 999 999 991

参 考 文 献

1 龙驭球. 有限元法概论. 北京:人民教育出版社,1988

2 Chen G Q, Ohnishi Y, Ito T. Development of high order manifold method. ICADD-2, Kyoto, Japan, 1997

3 Shi G H, Goodman. Discontinuous deformation analysis. In:Proceedings of the 25th U. S. Symposium on Rock Mechanics, Evanston, 25-27 June 1984; 269—277

4 Shi G H. Discontinuous deformation analysis;a new numerical model for the statistics and dynamics of deformable block structures. Engineering Computations, 1992; 9(2):157—168

5 Shi G. H. Manifold method. Proc of the 1st Int. Forum on DDA Simulation of Discontinuous Media. Bekerley:[S. n.], 1996; 52—204

6 Shi G H. Three dimensional discontinuous deformation analysis. In:Rock Mechanics in the National Interest. Elsworth, Tinucci and Heasley, 2001;1421—1428

7 姜冬茹, 骆少明. 三维数值流形方法及其积分区域的确定算法. 汕头大学学报(自然科学版), 2002;17(3):29—36

- 8 骆少明, 张湘伟, 吕文阁, 等. 三维数值流形方法的理论研究. 应用数学和力学, 2005;26(9):1027—1032
- 9 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 10 郑榕明, 张勇慧. 基于六面体覆盖的三维数值流形方法的理论探讨与应用. 岩石力学与工程学报, 2004; 23(10):1745—1754
- 11 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理. 北京: 科学出版社, 2001
- 12 林绍忠. 单纯形积分的递推公式. 长江科学院院报, 2005; 22(3): 32—34

Accuracy Algorithm of Integration and Gravity Centers in the Polyhedron with Arbitrary Shape

WU Yan-qiang¹, CHEN Guang-qi^{1,2}, JIANG Zai-sen¹

(Institute of Earthquake Science, CEA¹, Beijing 100036, P. R. China;

Kyushu University², Fukuoka, Japan 8160000)

[Abstract] Based on analyzing to simplex integration formula, its algorithm written by pseudocode is given, and described the integration procedure, and illustrate the calculation algorithm of gravity centers in polyhedron with arbitrary shape. The accuracy of above algorithms through comparing the difference between theoretical and calculated results of gravity centers in regular integral region with hollow, and analyzing their difference in different edge length ratio (10^{-4} — 10^4) are discussed. Then the adaptive characteristics of simplex integration algorithm are discussed through analyzing integral results in irregular integral region. The results show that the relative error between calculated results and theoretical results is about 10^{-15} — 10^{-14} , and the graphics conditions have minimal impact on integral results and the impact has not systematic characteristic. In conclusion, the results of simplex integration and gravity center have high stability and accuracy.

[Key words] polyhedron with arbitrary shape simplex integration gravity center issues graphic conditions

(上接第 6514 页)

The Radon Transform and Inverse Radon Transform on the Product Laguerre Hypergroup

LIU Pei¹, SUN Qing-wen¹, XIONG Lin-ping²

(Faculty of Mathematics and Physics, Basic Department¹, Faculty of Health Agent Management, Department Health and Service²,

Second Military Medical University, Shanghai. 200433, P. R. China)

[Abstract] The inversion Radon transform on the product Laguerre hypergroup K^n is discussed. At first, the theory of continuous wavelet analysis on K^n is given, then the Plancherel theory and Parseval formula on K^n are obtained. Furthermore, the expression of Radon transform on K^n is provided. At last, using the generalized wavelet transform the inversion formula of Radon transform on K^n is established.

[Key words] laguerre hypergroup radon transform plancherel theory