



数学

乘积拉盖尔超群上的 Radon 变换及其反演

刘沛¹ 孙庆文¹ 熊林平²

(第二军医大学基础部数理教研室¹, 第二军医大学卫勤系卫生事业管理教研室², 上海 200433)

摘要 主要讨论乘积 Laguerre 超群 K^n 上的 Radon 反演公式。首先定义 K^n 上的广义平移算子, 其次研究 K^n 上的广义 Fourier 变换, 得到 K^n 上的 Plancherel 定理及 Parseval 等式。在此基础上, 给出 K^n 上 Radon 变换具体表达式。最后利用广义小波变换得到 Radon 变换的反演公式。

关键词 Laguerre 超群 Radon 变换 Plancherel 定理

中图分类号 O152; **文献标志码** A

Radon 变换具有广泛的应用背景和理论价值, 因此受到越来越多人的关注与研究, 并且取得了很大的进步。比如, Radon 变换及其逆变换是图像处理中的一种重要研究方法, 许多图像重建便是有效地利用了这种方法, 它不必知道图像内部的具体细节, 仅利用图像上的一些投影值, 便可很好的反演出原图像。它已经成功地运用于层析 X 射线摄影中、二维椭圆形偏微分方程等领域。有关 Radon 变换的理论知识, 可参考文献[1]。目前, 我们发现许多作者采用小波逆公式来获取 Radon 反演公式。Holschneider 最先采用小波逆公式获得二维平面上的 Radon 逆公式。通过采用广义小波变换^[2], Nessibi 和 Trimèche 获得了 $2n+1$ 维海森堡群 H_n 上径向函数空间基础流形 $K=[0, +\infty) \times R$ 上的 Radon 反演公式^[3]。He&Liu 把此结果推广到第一类典型域上^[4]。在本文中, 我们主要研究乘积拉盖尔超群 K^n 上的 Radon 反演公式。

1 乘积 Laguerre 超群上的广义 Fourier 变换

令 $H_1 = \{(z, t) : z \in C, t \in R\}$ 是 3-维海森堡群, 该群上的乘法定义为

$$(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' - \text{Im}(\bar{z}z')) \quad (1)$$

如果对于任意的 $\theta \in [0, 2\pi)$, 均有 $f(e^{i\theta}z, t) = f(z, t)$, 则称 f 为 H_1 上的径向函数。

记 H_1 上径向函数空间的基础流形为

$K = R_+ \times R$, 其中 $R_+ = \{x \in R, x \geq 0\}$ 。

令 $K^n = R_+^n \times R^n$, $(x, t) = \{x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n\} \in K^n$, $(x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$, $(t_1, \dots, t_n) \in R^n$ 。定义 K^n 上的广义平移算子 $T_{(x,t)}$:

$$\begin{aligned} T_{(x,t)}f(y,s) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos\theta_1)}, \\ &\dots, \sqrt{(x_n^2 + y_n^2 + 2x_ny_n\cos\theta_n)}, s_1 + t_1 + \\ &x_1y_1\sin\theta_1, \dots, s_n + t_n + x_ny_n\sin\theta_n) d\theta_1 \dots d\theta_n \end{aligned} \quad (2)$$

显然, K^n 与广义平移算子 $T_{(x,t)}$ 构成乘积拉盖尔超群。定义 K^n 上的正测度 $d\mu(x, t) = \frac{1}{\pi^n} x_1 \dots x_n dx dt$ 。

2011年6月2日收到

第一作者简介: 刘沛(1982—), 女, 硕士, 讲师, 研究方向: 小波分析的理论。

那么 $L^2(K^n)$ 定义了 K^n 上的可测函数空间,使得

$$\|f\|_2^2 = \int_{K^n} |f(x, t)|^2 d\mu(x, t) < +\infty.$$

定义 1 对于 K^n 上任意函数 f 和 g 的卷积定义为

$$(f * g)(x, t) = \int_{K^n} T_{(x, t)} f(y, s) g(y, -s) d\mu(y, s) \quad (3)$$

对于所有的 $(\lambda, m) \in R^n \times N^n, (x, t) \in K^n$, 这里 N 表示所有非负整数集, 记

$$\varphi_{\lambda, m}(x, t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{\lambda_j, m_j}(x_j, t_j), \text{ 其中 } \varphi_{\lambda_j, m_j}(x_j, t_j) = \exp(i\lambda_j t_j) L_{m_j}(|\lambda_j| x_j^2) (j=1, \dots, n).$$

$L_{m_j}(x) = \exp(-x/2) l_{m_j}(x)/l_{m_j}(0)$, l_{m_j} 是 m_j 阶的拉盖尔多项式。由文献[5]知,

$\varphi_{\lambda, m}(\lambda, m) \in R^n \times N^n$ 是 K^n 的特征。

定义 2 对于任意的 $f \in K^n$, 定义 K^n 上的广义 Fourier 变换为

$$f(\lambda, m) = \int_{K^n} \varphi_{-\lambda, m}(x, t) f(x, t) d\mu(x, t) \quad (4)$$

令 $L^2(R^n \times N^n)$ 为 $R^n \times N^n$ 上的可测函数空间, 使得

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int_{R^n \times N^n} |g(\lambda, m)|^2 d\gamma(\lambda, m) < +\infty,$$

其中 $d\gamma(\lambda, m)$ 是由

$$\int_{R^n \times N^n} g(\lambda, m) d\gamma(\lambda, m) = \sum_{(m_1, \dots, m_n)} \prod_{j=1}^n l_{m_j}(0) \int_{R^n} g(\lambda, m) |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| d\lambda,$$

所定义的 $R^n \times N^n$ 上的正测度, 定义 $d\gamma(\lambda_j, m_j) (j=1, \dots, n)$ 为

$$\int_{R \times N} g(\lambda_j, m_j) d\gamma(\lambda_j, m_j) = \sum_{m_j=0}^{+\infty} l_{m_j}(0) \int_R g(\lambda_j, m_j) |\lambda_j| d\lambda_j.$$

容易得到

$$\int_{R^n \times N^n} g(\lambda, m) d\gamma(\lambda, m) = \int_{R \times N} \cdots \int_{R \times N} g(\lambda, m) d\gamma(\lambda_1, m_1) \cdots d\gamma(\lambda_n, m_n).$$

性质 1 对于任意的 $(x, t) \in K^n, (y, s) \in K^n, (\lambda, m) \in R^n \times N^n$, 那么函数 $\varphi_{\lambda, m}$ 满足乘积公式

$$\varphi_{\lambda, m}(x, t) \varphi_{\lambda, m}(y, s) = T_{(x, t)} \varphi_{\lambda, m}(y, s) \quad (5)$$

证明 对于 $\forall x, y \in R^n$, 由文献[6]知

$$l_m(x^2) l_m(y^2) = \frac{2^n}{\pi^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^n \exp(x_j y_j \cos \psi_j) l_{m_j} \times$$

$$(x_j^2 + y_j^2 + 2x_j y_j \cos \psi_j) \cos(x_j y_j \sin \psi_j) \times d\psi_1 \cdots d\psi_n.$$

由此得证。

性质 2 (i) 对于任意的 $f, g \in L^1(K^n)$ 有

$$(f * g)(\lambda, m) = f(\lambda, m) g(\lambda, m) \quad (6)$$

(ii) 令 $f \in L(K^n)$, 那么任意的 $(x, t) \in K^n, (\lambda, m) \in R^n \times N^n$, 有

$$(T_{(x, t)} f)(\lambda, m)(x, t) = \varphi_{\lambda, m}(x, t) f(\lambda, m) \quad (7)$$

证明 (i)

$$(f * g)(\lambda, m) = (f * g)(x, t) = \int_{K^n} \varphi_{-\lambda, m}(x, t) \left[\int_{K^n} T_{(x, t)} f(y, s) g(y, -s) d\mu(y, s) \right].$$

由卷积的交换性及乘法公式知式(6)成立, 同理可证式(7)。

定义 3 对于任意的 $(x, t) \in K^n$, 定义广义 Fourier 变换的逆公式

$$f(x, t) = \int_{R^n \times N^n} f(\lambda, m) \varphi_{\lambda, m}(x, t) d\gamma(\lambda, m) \quad (8)$$

定理 1 (Plancherel 定理) 广义 Fourier 变换是从 $L^2(K^n)$ 到 $L^2(R^n \times N^n)$ 上的一个等距同构, 特别地

$$\|f\|_2^2 = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in N^n} \prod_{j=1}^n l_{m_j}(0) \int_{R^n} |f(\lambda, m)|^2 \times |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| d\gamma \quad (9)$$

推论 (Parseval 公式) 对于任意的 $f, g \in L^2(K^n)$, 有以下等式成立。

$$\int_{K^n} f(x, t) g(x, t) d\mu(x, t) = \int_{R^n \times N^n} f(\lambda, m) \overline{g(\lambda, m)} d\gamma(\lambda, m).$$

2 $S(K^n)$ 的子空间 $S_R(K^n)$

令 $S(K)$ 是 Schwartz 函数空间, 即对于任意的 $k, p, q \in N$ 有

$$N_{k, p, q}(f) = \sup_{(x, t) \in K} \left\{ (1 + x^2 + t^2)^k \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial t^q} f(x, t) \right| \right\} < +\infty.$$

对于乘积 Laguerre 超群 K^n 的施瓦茨空间 $S(K^n)$ 可以类似地写出。

Strichartz 在文献[6]中定义了海森堡群上的 Radon 变换。类似地,我们定义 K^n 上的 Radon 变换为

$$R(f)(x, t) = (2\pi)^n \int_{R_+^n} T_{(x, t)} f(y, 0) y_1 y_2 \cdots y_n dy_1 dy_2 \cdots dy_n.$$

现在我们猜想 $S(K^n)$ 的一个子空间 $S_R(K^n)$, 在此空间是 Radon 变换 R 为一一变换。下面的事实是有用的

$$T_{(x, t)} g(\lambda, m) = \varphi_{\lambda, m}(x, t) g(\lambda, m) \quad (10)$$

$$R(f)(\lambda, m) = (-1)^{\|m\|} (2\pi)^n |\lambda|^{-1} f(\lambda, m) \quad (11)$$

式(11)中 $\|m\| = \sum_{j=0}^n m_j, |\lambda| = |\lambda_1| |\lambda_2| \cdots |\lambda_n|$ 。对于任意的 $j \geq 0$, 我们定义算子 $R^{j+1} = R(R^j)$,

$R^0 = I$ 表示单位算子, R^{-j} 表示 R^j 的逆算子。容易证明

$$R^j(f)(\lambda, m) = (-1)^{j\|m\|} (2\pi)^{jn} |\lambda|^{-j} f(\lambda, m) \quad (12)$$

通过文献[5]可知, R 不一定是 L^2 算子, 即就是说, 对于任意的 $f \in L^2(K^n)$, $R(f)$ 不一定属于 $L^2(K^n)$ 。通过 Plancherel 公式, 我们定义 $S(K^n)$ 的子空间 $S_R(K^n)$ 。

$$S_R(K^n) = \left\{ f \in S(K^n) : (2\pi)^{2nj} \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in N^n} \Pi_{j=1}^n l_{m_j}(0) \times \int_{R^n} |f(\lambda, m)|^2 |\lambda|^{-2j+1} d\lambda < +\infty, \forall j \in I \right\} \quad (13)$$

定理 2 任意的 R 在空间 $S_R(K^n)$ 上是一一映射。

证明 对于任意的 $f \in S_R(K^n)$, 由公式(11)显然 $R(f) \in S_R(K^n)$, 如果 $R(f) = R(g)$, 那么对于所有的 $(\lambda, m) \in R^n \times N^n$, 有

$$0 = R(f - g)(\lambda, m) = (-1)^{\|m\|} (2\pi)^n |\lambda|^{-1} (f - g) \times (\lambda, m) = (-1)^{\|m\|} (2\pi)^n |\lambda|^{-1} (f(\lambda, m) - g(\lambda, m)).$$

这就揭示了 $f = g$ 。现在令 $g \in S_R(K^n)$, 能过 Fourier 变换我们定义一个函数 f , 也就是说

$$f(\lambda, m) = (-1)^{\|m\|} (2\pi)^{-n} |\lambda| g(\lambda, m). \quad \text{那}$$

么, 我们可以得到 $R(f) = g$ 。对于所有的 $f \in S(K^n)$, 通过性质^[3], 我们可以演绎出 $\lambda_1^{\beta_1} \lambda_2^{\beta_2} \cdots \lambda_n^{\beta_n} \times \hat{f} \in L^2(R^n \times N^n)$ 。特别地, 对于所有的 $\beta \geq 0$ 有 $\lambda^{\beta} \hat{f} \in L^2(R^n \times N^n)$ ($\lambda^{\beta} = \lambda_1^{\beta_1} \lambda_2^{\beta_2} \cdots \lambda_n^{\beta_n}$)。因此, 空间 $S_R(K^n)$ 可以如下表示

$$S_R(K^n) = \left\{ f \in S(K^n) : (2\pi)^{2nj} \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in N^n} \Pi_{j=1}^n l_{m_j}(0) \times \int_{R^n} |f(\lambda, m)|^2 |\lambda|^{-2j+1} d\lambda < +\infty, \forall j \in N \right\} \quad (14)$$

3 利用广义小波变换获得 Radon 变换的逆公式

令 $f \in S(K^n)$, 那么

$$\int_{R^n} \frac{\partial f}{\partial t_j}(t) \exp(-2\pi i \lambda t) dt = 2\pi i \lambda_j \int_{R^n} f(t) \times \exp(-2\pi i \lambda t) dt.$$

现在我们定义 $S(K^n)$ 上的一个算子 $L = \prod_{j=1}^n \frac{\partial}{i \partial t_j}$ 。

显然,

$$L(f)(\lambda, m) = \prod_{j=1}^n \lambda_j \hat{f}(\lambda, m).$$

对于所有的 $f \in S_R(K^n)$, 容易得到 $RLRL(f) = f$ 。因此有

定理 3 令 $f \in S_R(K^n)$, 那么

$$R^{-1}(f) = LRL(f) \quad (15)$$

$$\text{令 } L_R^2(K^n) = \left\{ f \in L^2(K^n) : (2\pi)^{2nj} \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in N^n} \Pi_{j=1}^n l_{m_j}(0) \times \int_{R^n} |f(\lambda, m)|^2 |\lambda|^{-2j+1} d\lambda < +\infty, \forall j \in N \right\} \quad (16)$$

显然, 该空间上的 Radon 变换 R 仍然为双射。

令 $g \in L^2(K^n)$, 若存在一个常数 $C_g \in (0, +\infty)$, 使得对于所有的 $m \in N^n, \lambda \neq 0$, 都使得 $C_g = \int_R \frac{|g(a\lambda, m)|^2}{|a|} da$ 成立, 则称 g 为 K^n 上的广义小波。

令 $g \in S_R(K^n)$ 为 K^n 上的广义小波, 对于 $0 \neq a \in R$, 定义函数 $g_a, g_{a, (x, t)}$ 分别为

$$g_a(y, s) = \frac{1}{|a|^{2n}} g\left(\frac{y}{\sqrt{|a|}}, \frac{s}{a}\right), g_{a, (x, t)}(y, s) =$$

$$|a|^n T_{(x,t)} g_a(y,s)。$$

则有

$$g_a(\lambda, m) = g(a\lambda, m), g_{a, (x,t)}(\lambda, m) = |a|^n \varphi_{(\lambda, m)} \times g_a(\lambda, m)。$$

由于

$$\begin{aligned} (LRL(g))_a(\lambda) &= (LRL(g))(a\lambda, m) = |a|^n (-1)^{\|m\|} \times \\ &(2\pi)^n |\lambda| g(a\lambda, m) = |a|^n (-1)^{\|m\|} \times \\ &(2\pi)^n |\lambda| g_a(\lambda, m) = |a|^n \times \\ &(LRL)(g_a)(\lambda), \end{aligned}$$

由此我们可以看出 $(LRL(g))_a = |a|^n (LRL)(g_a)。$

现在我们定义 $L_R^2(K^n)$ 上的算子 $\tilde{\Phi}_g$ 为

$$\tilde{\Phi}_g f(x, t) = (\tilde{f}g)(x, t)。$$

因此, 我们可得 K^n 上 Radon 变换的逆公式如下:

定理 4 令 $g \in S_R(K^n)$ 为 K^n 上的广义小波, 那么对于所有的 $f \in S_R(K^n)$,

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{(2\pi)^{-2n}}{C_g} \int_{R \times K^n} \tilde{\Phi}_{(LRL(g))_a} (R(f))(y, s) g_{a, (y, s)}(x, \\ &-t) d\mu(y, s) \frac{da}{|a|^{2n+1}} \end{aligned} \quad (17)$$

和

$$\begin{aligned} R^{-1}(f)(x, t) &= \frac{(2\pi)^{-2n}}{C_g} \int_{R \times K^n} \tilde{\Phi}_{(LRL(g))_a} (f)(y, s) g_{a, (y, s)}(x, \\ &-t) d\mu(y, s) \frac{da}{|a|^{2n+1}} \end{aligned} \quad (18)$$

同时, 如果 $f \in L_R^2(K^n)$, 那么公式 (17), 式 (18)

在较弱意义下仍然成立。

证明 首先我们注意到以下事实

$$f * \hat{g}(\lambda, m) = f(\lambda, m) g(\lambda, m), \varphi_{-\lambda, m}(x, -t) = \varphi_{\lambda, m}(x, t)。$$

通过 Parseval 公式 (5) 得

$$\begin{aligned} \int_{K^n} \tilde{\Phi}_{(LRL(g))_a} (R(f))(y, s) g_{a, (y, s)}(x, -t) d\mu(y, s) &= \\ |a|^{2n} \int_{K^n} (R(f) * \overline{LRL(g_a)})(y, s) T_{(x, -t)} g_a(y, s) d\mu(y, s) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a|^{2n} \int_{R^n \times N^n} R(f)(\lambda, m) LRL(\bar{g}_a) T_{(x, -t)} \bar{g}_a(\lambda, m) d\gamma(\lambda, m) &= \\ |a|^{2n} \int_{R^n \times N^n} (2\pi)^{2n} f(\lambda, m) * \varphi_{\lambda, m}(x, t) |g_a(-\lambda, m)|^2 d\gamma(\lambda, m) &= \end{aligned}$$

两边同时在 R 上关于测度 $\frac{da}{|a|^{2n+1}}$ 积分得到

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi)^{-2n}}{C_g} \int_{R \times K^n} \tilde{\Phi}_{(LRL(g))_a} (R(f))(y, s) (y, s) d\mu(y, s) \frac{da}{|a|^{2n+1}} &= \frac{(2\pi)^{-2n}}{C_g} \int_R |a|^{2n} \int_{R^n \times N^n} (2\pi)^{2n} \hat{f}(\lambda, \\ m) \varphi_{\lambda, m}(x, t) |g_a(-\lambda, m)|^2 d\gamma(\lambda, m) \frac{da}{|a|^{2n+1}} &= \\ |a|^{2n} \int_{K^n \times N^n} R(f)(\lambda, m) LRL(\bar{g}_a) T_{(x, -t)} \bar{g}_a(\lambda, m) d\gamma(\lambda, m) &= \int_{R^n \times N^n} f(\lambda, m) \varphi_{\lambda, m}(x, t) d\gamma(\lambda, m) = \\ f(x, t) \end{aligned} \quad (19)$$

为上式两边分别 Radon 逆变换 R , 我们就完成了该公式的证明。

参考文献

- 1 Helgason S. The radon transform(2 nd). Boston: Birkhäuser, 1999
- 2 Holschneider M. Inverse Radon transform through inverse wavelet transform. Inverse Problems, 1991; 7: 853—861
- 3 Nessibi M M, Trimèche K. Inversion of the Radon transform on the laguerre hypergroup by using generalized wavelets. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997; 208: 337—363
- 4 He J, Liu H. Inversion of the Radon transform associated with the classical domain of type one. International Journal of Mathematics, 2005; 16: 875—887
- 5 Koorwinder T H. The addition formula for laguerre polynomials. SLAM J Math Anal, 1977; 8: 535—540
- 6 Strichartz R S. Lpharmonic analysis and Radon transforms on the Heisenberg group. Journal of Functional Analysis, 1991; 96: 350—406
- 7 He J. A characterization of inverse Radon transform on the Laguerre hypergroup. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006; 318: 387—395

(下转第 6520 页)

- 8 骆少明, 张湘伟, 吕文阁, 等. 三维数值流形方法的理论研究. 应用数学和力学, 2005;26(9):1027—1032
- 9 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析. 裴觉民, 译. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 10 郑榕明, 张勇慧. 基于六面体覆盖的三维数值流形方法的理论探讨与应用. 岩石力学与工程学报, 2004; 23(10):1745—1754
- 11 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理. 北京: 科学出版社, 2001
- 12 林绍忠. 单纯形积分的递推公式. 长江科学院院报, 2005; 22(3): 32—34

Accuracy Algorithm of Integration and Gravity Centers in the Polyhedron with Arbitrary Shape

WU Yan-qiang¹, CHEN Guang-qi^{1,2}, JIANG Zai-sen¹

(Institute of Earthquake Science, CEA¹, Beijing 100036, P. R. China;

Kyushu University², Fukuoka, Japan 8160000)

[Abstract] Based on analyzing to simplex integration formula, its algorithm written by pseudocode is given, and described the integration procedure, and illustrate the calculation algorithm of gravity centers in polyhedron with arbitrary shape. The accuracy of above algorithms through comparing the difference between theoretical and calculated results of gravity centers in regular integral region with hollow, and analyzing their difference in different edge length ratio (10^{-4} — 10^4) are discussed. Then the adaptive characteristics of simplex integration algorithm are discussed through analyzing integral results in irregular integral region. The results show that the relative error between calculated results and theoretical results is about 10^{-15} — 10^{-14} , and the graphics conditions have minimal impact on integral results and the impact has not systematic characteristic. In conclusion, the results of simplex integration and gravity center have high stability and accuracy.

[Key words] polyhedron with arbitrary shape simplex integration gravity center issues graphic conditions

(上接第 6514 页)

The Radon Transform and Inverse Radon Transform on the Product Laguerre Hypergroup

LIU Pei¹, SUN Qing-wen¹, XIONG Lin-ping²

(Faculty of Mathematics and Physics, Basic Department¹, Faculty of Health Agent Management, Department Health and Service²,

Second Military Medical University, Shanghai. 200433, P. R. China)

[Abstract] The inversion Radon transform on the product Laguerre hypergroup K^n is discussed. At first, the theory of continuous wavelet analysis on K^n is given, then the Plancherel theory and Parseval formula on K^n are obtained. Furthermore, the expression of Radon transform on K^n is provided. At last, using the generalized wavelet transform the inversion formula of Radon transform on K^n is established.

[Key words] laguerre hypergroup radon transform plancherel theory