



数学

组合 KdV 方程的精确解

朱明星¹ 王道明²

(江苏科技大学数理学院¹, 镇江 212003; 江苏大学非线性科学研究中心², 镇江 212013)

摘要 利用 (G'/G) 展开法求解了组合 KdV 方程, 得到了组合 KdV 方程的精确行波解。由于此方法中的 G 为某个一阶常系数线性 ODE 的通解, 故方法具有直接、简洁的优点; 更重要的是, 这种方法可用于求得其它许多非线性演化方程的行波解。

关键词 组合 KdV 方程 (G'/G) 展开法 精确解

中图分类号 O175.2; **文献标志码** A

非线性现象极为常见, 如粒子或晶格非简谐振动、固体在高温或低温条件下的热胀冷缩现象、非线性等离子振荡、潜水波在狭窄河道中的传播等。近年来, 非线性科学得到了迅速发展, 现在人们认识到它的发展必将对自然科学各学科的发展产生不可估量的影响。随着非线性科学的发展, 非线性方程的求解已成为广大物理学、力学、地球科学、生命科学、应用数学和工程技术工作者研究的一个重要课题。

近年来, 人们已经发现了一些有效的求解方法, 如变分法、截断展开法、齐次平衡法^[1]、Backlund 变换法、F-展开法^[2-4]、分离变量法、Jacobi 椭圆函数法等。最近, 由 Wang 等创立了 (G'/G) 展开法^[5-10], 并成功应用于求解非线性发展方程的孤立波解。受益于 Wang 等创立的 (G'/G) 展开法的启发, 利用一种简单的 $(1/G)$ 展开方法, 求解组合 KdV 方程。

$$u_t + \alpha uu_x + \varepsilon u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

该方程是 KdV 和 m KdV 方程的复合。广泛应用于等离子体物理、固体物理、原子物理、流体力学

和量子场理论等领域。在等离子体物理中它描述了无 Landau 衰减小振幅离子声波的传播, 在固体物理中用于解释通过氟化钠单晶的热脉冲传播, 同时还可以很好地描述在具有非谐束缚粒子的一维非线性晶格中波的传播, 又可作为流体力学中的一个模型方程; 当 $\alpha = 0$ 时转化为 m KdV 方程, 用来描述非调和晶格中声波的传播和一个无碰撞等离子体的 Alfen 波的运动。当 $\varepsilon = 0$ 时转化为 KdV 方程。众所周知, 它是最典型的非线性色散波动方程的代表。因此, 研究式(1)的精确解有重要的理论和实际价值。

1 方法介绍

非线性发展方程的一般形式可以写为:

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2)$$

式(2)中的 P 是关于变元 $u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots$ 的多项式。

1.1 引入变换

$$u = u(\xi), \xi = k(x - ct) \quad (3)$$

式(3)中 k 是待定常数。将式(3)代入式(2), 就得到关于 $u(\xi), u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi), \dots$ 的常微分

2011年5月26日收到

第一作者简介: 朱明星. 江苏科技大学讲师, 研究方向: 应用数学。

E-mail: zjeyzmx132@sina.com.

方程。

$$O(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (4)$$

这里“'”表示 $\frac{d}{d\xi}$ 。

1.2 设式(4)具有如下形式的行波解

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \left(\frac{1}{G} \right)^i \quad (5)$$

式(5)中 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 是待定常数, 正整数 n 的值通过平衡方程式(4)中的非线性项和最高阶导数项来确定, $G(\xi)$ 满足式(6)。

$$G'(\xi) + \lambda G(\xi) + \mu = 0 \quad (6)$$

式(6)中 λ, μ 为待定系数。式(6)的解为:

$$G(\xi) = C \exp(-\lambda \xi) - \frac{\mu}{\lambda} \quad (7)$$

式(7)中 C 为待定系数。

1.3 将式(5)代入式(4)

得到关于 $\frac{1}{G}$ 的多项式方程, 令 $\left(\frac{1}{G} \right)^i (\xi)$ 的系数

为零, 就得到了关于 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 。 k, λ, μ 的非线性方程组, 利用 Mathematica 软件解这个非线性代数方程组求得待定系数的值。

1.4 由推导步骤 1.3

所求得 $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, k, λ, μ 值和式(5)、式(7)可得非线性发展方程式(1)的行波解。

2 组合 KdV 方程的精确解

作变换

$$u(x, t) = u(\xi), \xi = x - kt \quad (8)$$

将式(8)代入式(1)得

$$-ku' + \alpha uu' + \beta u^2 u' + \varepsilon u''' = 0 \quad (9)$$

平衡方程式(12)中的最高阶导数项 u''' 和非线性项 $\beta u^2 u'$, 得到 $n=1$ 。故方程(1)的解可设成如式(10)。

$$u(\xi) = a_0 + \frac{a_1}{G} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)得到关于 $\left(\frac{1}{G} \right)^i (\xi)$ 的多项

式方程, 搜集 $\left(\frac{1}{G} \right)^i (\xi)$ 的系数并令之为零, 得到如

下非线性代数方程组:

$$\begin{cases} 3ka_0 + 2\varepsilon a_0^3 = 0 \\ ka_1 + \beta\lambda^2 a_1 + \varepsilon a_0^2 a_1 = 0 \\ 3\beta\lambda\mu a_1 + \varepsilon a_0 a_1^2 = 0 \\ 6\beta\mu^2 a_1 + \varepsilon a_1^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

利用 Mathematica 软件解这个非线性代数方程组得:

$$a_0 = \lambda \sqrt{\frac{3\beta}{2\varepsilon}}, a_1 = \mu \sqrt{\frac{6\beta}{\varepsilon}}, k = -\frac{\beta\lambda^2}{2};$$

$$a_0 = \lambda \sqrt{\frac{3\beta}{2\varepsilon}}, a_1 = -\mu \sqrt{\frac{6\beta}{\varepsilon}}, k = -\frac{\beta\lambda^2}{2}.$$

将上述结果代入式(8)、式(10)并由式(7)得

$$u(\xi) = \lambda \sqrt{\frac{3\beta}{2\varepsilon}} \pm \frac{\lambda\mu}{C\lambda \exp(-\lambda\xi) - \mu} \sqrt{\frac{6\beta}{\varepsilon}}, \xi = x + \frac{\beta\lambda^2}{2}t \quad (12)$$

式(12)中 C 为任意常数,

3 结 论

本文通过引入微分方程式(7), 求解了方程的新精确解。从此文求精确解来看, 此方法充分说明了求解此非线性问题具有明显的优势, 更直接、更简洁。对于其它类问题, 能否适用, 还需要进一步研究。

参 考 文 献

- 1 王明亮, 李志斌, 周宇斌. 齐次平衡原则及其应用. 兰州大学学报, 1999; 35(3): 8—16
- 2 朱明星. 变系数 BBM 方程的精确解. 江苏科技大学学报(自然科学版), 2008; (10): 85—89
- 3 李保安, 陈金兰, 王明亮. F 展开法在求解一类 Klein-Gordon 方程中的应用. 河南科技大学学报(自然科学版), 2005; 26(5): 80—83
- 4 王明亮, 聂惠, 李向正. 用 F-展开法解 Sine-Gordon 方程. 河南科技大学学报, 2005; (26): 79—82
- 5 Wang Mingliang, Li Xiangzheng, Zhang Jinliang. The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. Physics Letters A, 2008; 372: 417—423

(下转第 6144 页)

Synthesis and Characterization of Monodispersed ZnO Microsphere

GUO Ting-ting, LIU Yan-ping*, YE Ling-juan, LIU Dong, WANG Lei, LI Ping

(College of Physics and Electronic Engineering, Taizhou University, Taizhou 318000, P. R. China)

[Abstract] Monodispersed ZnO microsphere was synthesized *via* hydrothermal method using $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ as precursors and triethanolamine (TEA) aqueous solution as solvent. The samples were characterized by X ray diffraction (XRD) and scanning electron microscopy (SEM), respectively. The results show that the diffraction peaks belong to the typical ZnO wurtzite structure and ZnO microsphere is composed of tens of nanometer nanoparticles. The morphology of the samples strongly depends on the content of TEA and concentration of precursor. The irregular particles changes to sphere shape with the increased TEA content. In addition, the morphology varies from sphere to hexagon prism as the concentration of precursor increased. Therefore, the concentration of precursor and TEA content should be accurately controlled to synthesize monodispersed ZnO microsphere.

[Key words] ZnO microsphere hydrothermal method nanocrystallites

(上接第 6140 页)

- 6 Niu Yanxia, Li Erqiang, Zhang Jinliang. Solving $(2+1)$ -dimensional breaking solution system by (G'/G) -expansion method. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science), 2008;29(5):73—76
- 7 Wang Mingliang, Zhang Jinliang, Li Xiangzheng. Application of the (G'/G) -expansion to travelling wave solutions of the Broer-Kaup and the approximate long water wave equations. Applied Mathematics and Computation, 2008;206:321—326

- 8 陈金兰,李向正,王跃明.组合 KdV 方程的精确解.兰州理工大学学报,2005;(3):14—16
- 9 Zhang Jiao, Wei Xiaoli, Lu Yongjie. A generalized (G'/G) -expansion method and its applications, Physics Letters A, 2008; 372: 3653—3658
- 10 Zhang Sheng, Dong Ling, Ba Jinmei, *et al.* The (G'/G) -expansion method for nonlinear differential-difference equations. Physics Letters A, 2009; 373: 905—910

Exact Solutions for Combined KDV Equation

ZHU Ming-xing¹, WANG Dao-ming²

(Jiangsu University of Science and Technology², Zhenjiang 212003, P. R. China;

Nonlinear Scientific Research Center, Jiangsu University², Zhenjiang 212013, P. R. China)

[Abstract] The Modified (G'/G) method is used to solve the combined KDV equation, by means of the method, exact traveling wave solutions are obtained. In this method, G for a second order linear ODE of the general solution, so the method is direct, simple; more importantly, this method can be used in many other nonlinear evolution equations to obtain traveling wave solutions.

[Key words] generalized KdV equation (G'/G) expansion method exact solutions