

力学

动态柔度、迁移率和加速性在频率响应中的应用

沈宇捷 黄亚宇 李伟成
(昆明理工大学机电工程学院,昆明 650093)

摘要 通过一个振动模型的实验,研究一个单自由度振动系统的输入及输出。建立系统方程并通过拉普拉斯变换后,在频域中,研究属于频率响应函数范畴的三种概念,即动态柔度、迁移率和加速性。最后总结出这三种频率响应函数在实验里的应用范围。

关键词 单自由度振动系统 频率响应 动态柔度 迁移率 加速性

中图法分类号 O347.1; **文献标志码** A

机械工程领域中的各种系统的功能都是从输入端接收一个输入信号,并从输出端产生一个输出信号。对工程信号的研究而言,在频域中进行分析是最方便的。而频率响应(frequency response)则是信号处理中非常重要的概念。

本文通过研究频率响应中的三种具体的概念,即动态柔度(Dynamic Flexibility)、迁移率(Mobility)和加速性(Accelerance),进而研究频率响应在具体工程信号处理中的应用。

1 单自由度系统及系统方程的建立

最简单的单自由度系统是重物-弹簧-阻尼系统。如图1所示,现实中我们可以通过将一个重物固定在一个伸长的钢尺上来模拟这个系统。

该系统简化图如图2所示。根据牛顿第二定律,可以得到系统方程,即

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{1}$$

并且我们有速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x}$ 表示为

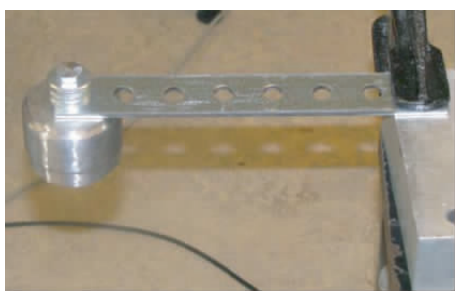


图1 单自由度振动系统模型

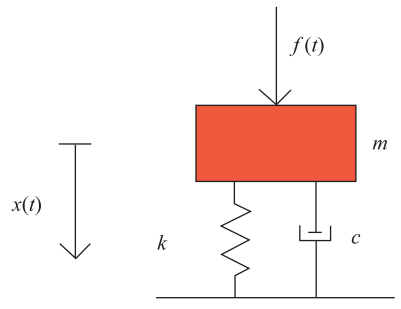


图2 系统简化图

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v \tag{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a \tag{3}$$

对式(1)进行拉普拉斯变换,得到

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = F(s) \tag{4}$$

系统传递函数为

2011年5月27日收到,6月10日修改
第一作者简介:沈宇捷。昆明理工大学机械制造及自动化硕士研究生。E-mail:fpspaul@qq.com。

$$H(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1/m}{s^2+2s\zeta\omega_0+\omega_0^2}\tag{5}$$

式(5)中阻尼比 ζ 和角频率 ω_0 分别为

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{mk}};\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}。$$

2 频率响应

在式(5)中,我们通过替代关系, $s=j\omega=j2\pi t$,得到频率相应函数 $H(f)$,即

$$H(f)=\frac{X(f)}{F(f)}=\frac{1/k}{1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2+j2\zeta\left(\frac{f}{f_0}\right)}\tag{6}$$

式(6)所展示的频率响应函数,着眼于位移和力的比率关系,其称之为动态柔度[1](Dynamic Flexibility)。但是在实际工程应用中,位移往往是难以测量的,在本文所研究的实验中也是如此。而相对于位移,速度值可以更加容易地进行测量(通过各种速度传感器)。采用速度和力的关系,我们可以得到第二个频率响应函数,即迁移率[1](Mobility)

$$H_v(f)=\frac{V(f)}{F(f)}=j2\pi f\frac{1/k}{1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}+j2\zeta\left(\frac{f}{f_0}\right)\tag{7}$$

虽然在实际工程应用中,我们可以测量速度值,但是更多情况下,我们测量的输出信号是用加速度来衡量的。于是可以得到第三个频率相应函数,即加速性^[1](Accelerance)

$$H_a(f)=\frac{V(f)}{F(f)}=-\left(j2\pi f\right)^2\frac{1/k}{1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2+j2\zeta\left(\frac{f}{f_0}\right)}\tag{8}$$

3 通过频率响应求系统固有频率和阻尼的方法

通过频率响应来求系统固有频率和阻尼的方法有很多。比较常用的有四种。第一就是在幅值铺中通过测量波峰得到^[2]。当阻尼比 ζ 远小于1时,可以认为系统的无阻尼固有频率约等于有阻尼固有频率^[2]。但是这种方法的精度不高。

第二种方法半功率带宽法,就用到前文介绍的三种频率响应函数^[3]。这种方法也叫做3 dB-带宽法。设带宽 B_r 为

$$B_r=f_l-f_u,其中$$

$$|H(f_l)|^2=|H(f_u)|^2=\frac{1}{2}|H(f_d)|^2。$$

则根据一系列的推导可以证明

$$\zeta=\frac{B_r}{2f_d}\tag{9}$$

第三种方法则是将动态柔度、迁移率和加速性的实部和虚部分离出来,并在频谱图上进行测量^[3]。其中,动态柔度的虚部和加速性的虚部有波峰,可以参量,而迁移率的实部有波峰可以测量。图3和图4是某个系统的动态柔度响应函数的示例。

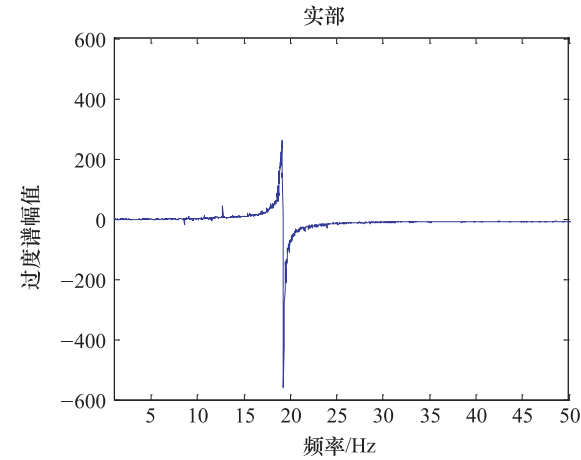


图3 某系统动态柔度实部

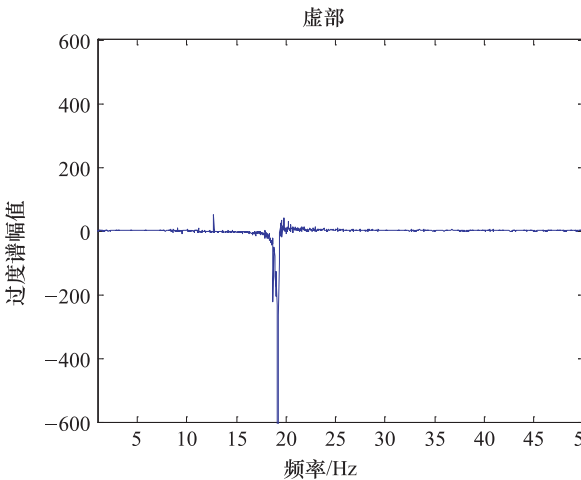


图4 某系统动态柔度虚部

第四种方法是在奈奎斯特图(Nyquist Diagram)中进行测量^[4]。这种方法的精确度较高,但是要将三种频率相应函数做进一步的运算,比较繁琐。

4 通过实验对三种频率响应函数的研究及应用

在该试验中,实验者手持铁锤轻轻敲击重物,通过和计算机相连接的数据采集单元(图5)采集位移、速度和加速度,最后在 MATLAB 中通过计算,输出三种频率相应函数的图形。



图5 数据采集单元

在 MATLAB 中进行一系列的计算后,可以得出该三种频率响应函数的图形,如图6所示(图6中,蓝色曲线代表动态柔度,绿色曲线代表迁移率,红色曲线代表加速性,下同)。

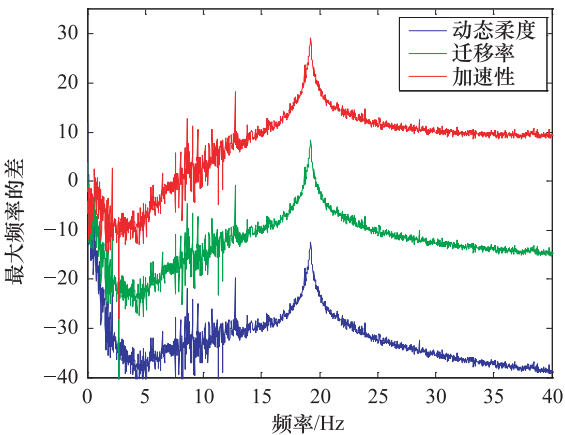


图6 三种频率响应函数

从图6可以看出,三种频率响应函数动态柔度、迁移率和加速性彼此符合的相当一致。并且,根据

其中任意一种频率响应函数,可以计算出系统固有频率和阻尼。如图7所示。

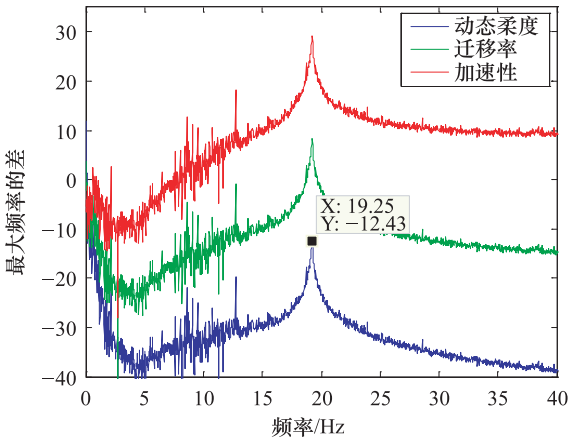


图7 系统固有频率

从图7可以看出,系统固有频率为

$$f_d = 19.25 \text{ Hz}。$$

使用 3 dB 带宽法,计算系统的阻尼比(图8)。

$$y = - \sqrt{\frac{1}{2}(f_d)^2} = 13.6188。$$

作一条水平线,其值为 -13.6188,和频率响应函数交于两点,即

$$f_u = 19.18, f_l = 19.28, \text{ 则}$$

$$B_r = f_l - f_u = 0.1。$$

阻尼比

$$\zeta = \frac{B_r}{2f_d} = 0.0026。$$

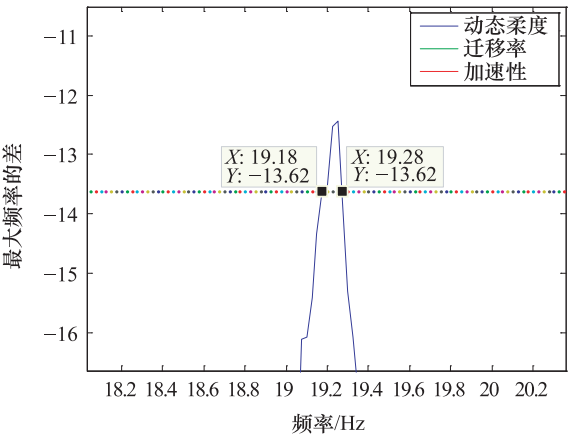


图8 3 dB 带宽法

5 结论

本文介绍了频率响应中的三种概念,动态柔度、迁移率和加速性。并且根据一个单自由度系统的数据信号采集实验,验证了这三种概念的定义及应用,即通过频率响应求出了系统的固有频率及阻尼比。而在实际工程应用中,加速度、速度信号的采集要比位移信号的采集简便的多。因此,在实际工程应用中,我们应该尽可能地使用加速性或者迁移率,而不是动态柔度。

参 考 文 献

1 Brandt A. Introductory noise & vibration analysis, Saven Edu Tenc AB and The Department of Telecommunications and Signal Processing Bleking Institute of Technology, Introductory Noise & Vibration Analysis Saven Edutech AB, Sweden,2003

2 昆明理工大学机电学院工程信号处理教材编委会. 工程信号处理. 昆明:昆明理工大学研究生教材,2000

3 Kao-Walter S, Jiang F, Walter M, *et al.* An experimental analysis of the correlation between J-integral and CMOD of elastic and plastic steel under impact loading, to be submitted to Eng. Frac. Mech. SWEDEN,2010

4 秦树人. 工程信号处理. 北京:高等教育出版社,2008

Application of Dynamic Flexibility, Mobility and Accelerance in Frequency Response

SHEN Yu-jie, HUANG Ya-yu, LI Wei-cheng
(Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China)

[Abstract] A single degree of freedom (SDOF) system is studied through a vibration experiment. The system equation is established and Laplace Transformation is taken. Then, dynamic flexibility, mobility and accelerance are discussed in order to get the goodness and application of these three kinds of frequency response.

[Key words] SDOF frequency response dynamic flexibility mobility accelerance