第 11 卷　第 26 期　2011 年 9 月
1671—1815(2011)26-6413-03

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 26　Sep. 2011

时间测度上半正边值问题正解的存在性

张雪玲　范进军

(山东师范大学数学科学学院,济南,250014)

摘　要　利用锥拉压不动点定理讨论了时间测度上二阶非线性半正边值问题两个正解的存在性。给出格林函数的一般性求法,这在大多数文章中是不多见的。

关键词　时间测度链　半正边值问题　正解　锥　不动点

中图法分类号　O175.8;　　**文献标志码**　A

1　引言及预备知识

1990 年 Hilger 引入的时间测度思想统一了连续分析和离散分析,并迅速发展成为一个重要的研究领域.文献[1]利用锥理论和不动点指数方法研究了时间测度上一类二阶非线性微分方程的正解,文献[2]研究了时间测度上一阶非线性边值问题正解的存在性,本文利用锥拉压不动点定理,讨论了时间测度上二阶非线性半正边值问题正解的存在性,并得到两个正解的存在性结果.

本文考虑如下半正边值问题

$$\begin{cases} x^{\Delta\Delta}(t) = f(t,x(\sigma(t))), t \in [0,1]_T, \\ x(0) = x(\sigma(1)) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

式(1.1)中 T 是一个时间测度链,f: $[0,1]_T \times [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 连续。

定义 1.1 实数的任意非空闭子集叫时间测度。设 T 为时间测度,当 $t < \sup T$ 时,在 t 处定义前跳算子 σ:$T \to T$ 为 $\sigma(t) = \inf\{s \in T: s > t\}$。若 $\sigma(t) > t$,则称 t 为右离散的;若 $\sigma(t) = t$,则称 t 为右致密的.称 x:$T \to R$ 在 T 上是右致密连续的,如果它在所有右致密点连续,左致密右离散点左极限存在有限的函数 x,记为 $x \in C_{rd}(T)$。

由已知知识易求得边值问题

$$\begin{cases} x^{\Delta\Delta}(t) = 0, t \in [0,1]_T, \\ x(0) = x(\sigma(1)) = 0 \end{cases}$$

的格林函数为

$$G(t,s) = \frac{1}{\sigma(1)}\begin{cases} t(\sigma(s) - \sigma(1)), t \leqslant s, \\ \sigma(s)(t - \sigma(1)), t > \sigma(s) \end{cases}$$

且具有下列性质:

(i) $-\dfrac{\sigma(1)}{4} \leqslant G(t,s) \leqslant 0$;

(ii) $\max\limits_{t\in[0,\sigma(1)]} |G(t,s)| = \dfrac{1}{\sigma(1)}\begin{cases} s(\sigma(1) - \sigma(s)), t \leqslant s, \\ \sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s)), t > \sigma(s) \end{cases} \leqslant \dfrac{\sigma(s)}{\sigma(1)}(\sigma(1) - \sigma(s))$;

(iii) $|G(t,s)| \geqslant q(t) \max\limits_{t\in[0,\sigma(1)]} |G(t,s)|$,其中 $q(t) = \min\limits_{t\in[0,\sigma(1)]}\left\{\dfrac{t}{\sigma(1)}, 1 - \dfrac{t}{\sigma(1)}\right\}$,即当 $t \in \left[0, \dfrac{\sigma(1)}{2}\right]$ 时,$q(t) = \dfrac{t}{\sigma(1)}$;当 $t \in \left[\dfrac{\sigma(1)}{2}, \sigma(1)\right]$ 时,$q(t) = 1 - \dfrac{t}{\sigma(1)}$,显然 $0 < q(t) \leqslant 1$。

为方便起见,给出下列假设:

(H_1)对任意 $t \in [0,1]_T, x \in [0, +\infty)$,存在 $M > 0$ 使得 $g(t)h(x) \leqslant f(t,x) - M \leqslant 0$ 成立,其中 g:$[0,1]_T \to (0, +\infty)$ 连续且

2011 年 6 月 9 日收到

第一作者简介:张雪玲(1987—),山东济宁人,硕士研究生,研究方向:非线性常微分方程。

$\int_0^{\sigma(1)} g(s)\Delta s < \infty$,h:$[0, +\infty) \to (-\infty, 0)$ 连续。

(H_2)存在 $R_2 > R_1 = \frac{\sigma(1)}{4}K\int_0^{\sigma(1)} g(s)\Delta s + R$。其中

$K = \max\limits_{t\in[0,\sigma^2(1)]} |h(u(t) + \varphi(t))|$,

$R = \max\limits_{t\in[0,\sigma(1)]} \frac{M\int_0^{\sigma(1)} |G(t,s)|\Delta s}{q(t)}$ 使得

$f - M \leqslant \frac{R_2}{\min\limits_{t\in[0,\sigma(1)]}\int_0^{\sigma(1)} G(t,s)\Delta s} < 0$ 成立。

(H_3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(t,x) - M|}{x} = 0$ 关于 $t \in [0,1]_T$ 一致成立。

考虑近似问题

$$\begin{cases} u^{\Delta\Delta}(t) = f(t.u(\sigma(t)) + \varphi(\sigma(t))) - M, t \in [0,1]_T \\ u(0) = u(\sigma(1)) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

式(1.2)中

$\varphi(t) = M\int_0^{\sigma(1)} G(t,s)\Delta s, u(t) = x(t) - \varphi(t)$。

引理 1.1[3] 设 E 是 Banach 空间,P 为 E 中的锥,Ω_1,Ω_2 是 E 中有界开集,$\theta \in \Omega_1$,$\overline{\Omega_1 \subset \Omega_2}$,$A$:$P \cap (\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1) \to P$ 全连续。若满足

(i) $\|Ax\| \leqslant \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$;$\|Ax\| \geqslant \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$ 或

(ii) $\|Ax\| \leqslant \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2$;$\|Ax\| \geqslant \|x\|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1$;那么 A 在 $P \cap (\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中必具有不动点。

2 主要结果

令 $P = \{u \in E: u(t) \geqslant q(t)\|u\|\}$,$\Omega_R = \{x \in P: \|x\| < R\}$,则 P 为 E 中的锥。在 P 中定义算子 A 如下:

$$(Au)(t) = \int_0^{\sigma(1)} G(t,s)[f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) - M]\Delta s \tag{2.1}$$

则

$$(Au)(t) \leqslant \int_0^{\sigma(1)} G(t,s)g(s)h(u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s)))\Delta s \leqslant$$

$$-\frac{\sigma(1)}{4}\int_0^{\sigma(1)} g(s)h(u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s)))\Delta s \leqslant$$

$$\min_{t\in[0,\sigma^2(1)]} h(u(t) + \varphi(t))\left(-\frac{\sigma(1)}{4}\right) \times \int_0^{\sigma(1)} g(s)\Delta s < \infty 。$$

故算子 A 有意义,且利用 Arzela-Ascoli 定理易证 A 是全连续算子。

引理 2.1 $u(t)$是边值问题式(1.2)的解当且仅当 $u(t)$是积分方程(2.1)的不动点。

证明 必要性:设 $u(t)$是边值问题式(1.2)的解,对式(1.2)从 0 到 t 积分得

$$u^\Delta(t) - u^\Delta(0) = \int_0^t [f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) - M]\Delta s$$

则

$$u^\Delta(t) = u^\Delta(0) + \int_0^t [f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) - M]\Delta s =$$

$$u^\Delta(0) + \int_0^t [f(\sigma(s),u(\sigma^2(s)) + \varphi(\sigma^2(s))) - M]\Delta(\sigma(s))。$$

对上式从 0 到 t 积分并令 $t = \sigma(1)$ 得

$$u(t) = \int_0^{\sigma(1)} G(t,s)[f(\sigma(s),u(\sigma^2(s)) + \varphi(\sigma^2(s))) - M]\Delta(\sigma(s)) = (Au)(t)$$ 其中 $$G(t,s) = \frac{1}{\sigma(1)}\begin{cases} t(\sigma(s) - \sigma(1)), t \leqslant s, \\ \sigma(s)(t - \sigma(1)), t > \sigma(s)。\end{cases}$$ 必要性得证。

充分性:设 $u(t)$是积分方程式(2.1)的不动点,则

$$u(t) = \int_0^{\sigma(1)} G(t,s)[f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) - M]\Delta s =$$

$$\int_0^t \frac{\sigma(s)(t - \sigma(1))}{\sigma(1)}[f(\sigma(s),u(\sigma^2(s)) + \varphi(\sigma^2(s))) - M]\Delta(\sigma(s)) + \int_t^{\sigma(1)} \frac{t(\sigma(s) - \sigma(1))}{\sigma(1)}[f(\sigma(s), u(\sigma^2(s)) + \varphi(\sigma^2(s))) - M]\Delta(\sigma(s))。$$

对上式求两次 Δ- 导数即得要证结论。

下面给出本文的主要结果。

定理 2.1 设条件(H_1)—(H_3)成立,则边值问题式(1.1)至少存在两个正解。

证明 由 H_1 及 R_1 的定义知,当 $u \in \partial\Omega_{R_1}$ 时有

$$|(Au)(t)| \leqslant \int_0^{\sigma(1)} |G(t,s)||f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) -$$

$$M|\Delta s \leqslant \frac{\sigma(1)}{4}\int_0^{\sigma(1)} g(s)\,|h(u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s)))|\Delta s \leqslant \frac{\sigma(1)}{4}K\int_0^{\sigma(1)} g(s)\Delta s < R_1 = \|u\|$$

由(H_2)知，当 $u \in \partial\Omega_{R_2}$ 时有

$$|(Au)(t)| = \left|\int_0^{\sigma(1)} G(t,s)[f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) - M]\Delta s\right| \geqslant \int_0^{\sigma(1)} G(t,s)\frac{R_2}{\min\limits_{t\in[0,\sigma(1)]}\int_0^{\sigma(1)} G(t,s)\Delta s} \geqslant R_2 = \|u\|$$

由(H_3)知，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $R_3 > 0$，当 $|x| > R_3$ 时有 $|f(t,x) - M| \leqslant \varepsilon x$，不妨取 $R_3 = R + N$，其中 N 足够大。则当 $u \in \partial\Omega_{R_3}$ 时有

$$|(Au)(t)| \leqslant \int_0^{\sigma(1)} |G(t,s)|\,|f(s,u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s))) - M|\Delta s \leqslant \frac{\sigma(1)}{4}\varepsilon\int_0^{\sigma(1)} (u(\sigma(s)) + \varphi(\sigma(s)))\Delta s \leqslant \frac{\sigma(1)}{4}\varepsilon\int_0^{\sigma(1)} u(\sigma(s))\Delta s \leqslant \|u\|。$$

由引理 1.1 知算子 A 有两个不动点 u_1, u_2 满足 $R_1 < u_1 \leqslant R_2 < u_2 \leqslant R_3$。由 $u_1 \in P$ 知

$$u_1(t) \geqslant q(t)u_1 \geqslant R_1 q(t) > Rq(t) \geqslant -M\int_0^{\sigma(1)} G(t,s)\Delta s = -\varphi(t)。$$

从而边值问题式(1.1)有正解 $x_1(t) = u_1(t) + \varphi(t) > 0$。同理可得 $u_2(t) > -\varphi(t)$，边值问题式(1.1)有正解 $x_2(t) = u_2(t) + \varphi(t) > 0$。

故边值问题式(1.1)存在两个正解。证毕。

参　考　文　献

1　李红玉，孙经先，崔玉军. 测度链上的非线性微分方程的正解. 数学年刊，(2009)；30A(1)：97—106

2　Sun Jian ping. Twin positive solutions of nonlinear first-order boundary value problems on time scales. Nonlinear Anal，2008；68：1754—1758

3　郭大钧. 非线性泛函分析. 济南：山东科学技术出版社，1985

Existence of Positive Solutions for Semipositone Boundary Value Problem on Time Scales

ZHANG Xue-ling，FAN Jin-jun

(Department of Mathematics，Shandong Normal University，Jinan 250014，P. R. China)

[**Abstract**]　By using the fixed point theorem of cone expansion and compression，the existence of positive solutions for semipositone boundary value problem on time scales is considered，and obtained twin positive solutions' existence with certain conditions，and given the process of getting Green function.

[**Key words**]　time scale　　semipositone boundary value problem　　positive solutions　　cone fixed point