第 11 卷　第 23 期　2011 年 8 月
1671—1815(2011)23-5625-03

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 23　Aug. 2011

一类带参数的二阶积分边值问题正解的存在性

董　升

(山东科技大学信息科学与工程学院，青岛 266510)

摘　要　应用锥中的 Krasnaselskii's 不动点定理来研究下列二阶积分边值问题解的存在性

$$\begin{cases} x'' + \lambda f(t,x(t)) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

其中 $f \in C([0,1] \times R, R)$，$0 < \int_0^1 a(s)\mathrm{d}s < 1$。

关键词　积分边值问题　　正解　　不动点定理

中图法分类号　O175.8;　　　**文献标志码**　A

带参数的边值问题

$$\begin{cases} x'' + \lambda f(t,x(t)) = 0,\ 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

主要来源于应用数学和物理学，比如流体力学，核物理和热传导。许多作者对这类边值问题作了大量研究[1—5]。

近来，由于数学和物理学的发展，积分边值问题被广泛研究，例如在文献[6]中作者研究了下列积分边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(x(t)) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = 0,\ x(1) = g\left(\int_0^1 x(s)\mathrm{d}s\right), \end{cases}$$

变号解的存在性，其中 $f, g \in C(R,R)$。

在文献[7]中作者得到了下列积分边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(x(t)) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

多个变号解的存在性结果，其中 $f \in C(R,R)$，$0 < \int_0^1 a^2(s)\mathrm{d}s < 1$。

2011 年 5 月 2 日收到　　　山东省优秀中青年科学家科研奖励基金(BS2010SF023)资助

作者简介：董　升，山东莱西人，研究生，研究方向：非线性泛函分析。

受以上文献的启发，现研究一类带参数的二阶积分边值问题

$$x'' + \lambda f(t,x(t)) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\mathrm{d}s \qquad (1)$$

多个正解的存在性，其中

$f \in C([0,1] \times R, R)$，$0 < \int_0^1 a(s)\mathrm{d}s < 1$。

现对非线性项附加一定的条件，将得到一个 $\bar{\lambda}$，使得 $\lambda > \bar{\lambda}$ 时，式(1)至少有两个正解。

1　预备知识和引理

记

$$\sigma_1 = \int_0^1 s a(s)\mathrm{d}s,\ \gamma = \frac{1 + \int_0^1 (1-s)a(s)\mathrm{d}s}{1 - \sigma_1}。$$

令

$$E = \left\{x \in C[0,1]: x(0) = 0, x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\mathrm{d}s\right\},$$

$$P = \{x \in E: x(t) \geqslant t(1-t)\|x\|\},$$

其中范数 $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$。那么，$(E, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间，P 是 E 中的锥。

定义算子 $A: E \to E$ 如下

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s,$$

其中

$$k(t,s) = G(t,s) + \frac{t}{1-\sigma_1}\int_0^1 G(\tau,s)a(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ s(1-t),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1。\end{cases}$$

下面，我们给出本文用到的假设条件。

(H1) $f\in C([0,1]\times R,R)$，$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=0$ 对 $t\in[0,1]$一致成立，$0 < \int_0^1 a(s)\mathrm{d}s < 1$，

(H2) 存在 $r>0$，使得$f(t,r)=0,\forall t\in[0,1]$，且对任何 $x\in(0,r)$，$f(t,x)>0,\forall t\in[0,1]$。

引理 1[8] 对任意$f\in C[0,1]$，$x\in C^2[0,1]$是边值问题(1)的解当且仅当 $x\in C[0,1]$是积分方程

$$x(t) = \lambda\int_0^1 k(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s$$

的解。

引理 2[6] 对 $t,s\in[0,1]$，有 $t(1-t)k(s,s)\leqslant k(t,s)\leqslant\gamma e(s)$，其中 $e(s)=s(1-s)$。

引理 3[9] 设 E 是一个实 Banach 空间。$P\subset E$ 一个锥。假设 Ω_1,Ω_2 是 E 中两个有界的开子集，其中 $0\in\Omega_1,\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$。若 $A:P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 是一个全连续算子，使得下列两个条件之一成立：

(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_1$，

且 $\|Ax\|\geqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_2$；

(ii) $\|Ax\|\geqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_1$，

且 $\|Ax\|\leqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_2$，

则 A 在 $P\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$少有一个不动点。

2 结论

定理 1 假设 (H1)—(H2)成立，那么存在一个常数 $\bar{\lambda}>0$，使得当 $\lambda>\bar{\lambda}$ 时，边值问题(1) 至少有两个正解。

证明 定义

$$\bar{f}(t,x)=\begin{cases}f(t,x),\ 0\leqslant x\leqslant r,\\ 0,\qquad x\geqslant r \text{ or } x\leqslant 0.\end{cases}$$

下面考虑与式(1)相关的修正的边值问题：

$$x''+\lambda\bar{f}(t,x(t)) = 0, 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$x(0) = 0, x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\mathrm{d}s \qquad (2)$$

由引理 1 知，边值问题(2)的解与积分方程 $x(t) = \lambda\int_0^1 k(t,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s$ 的解等价。

定义算子 $\bar{A}_\lambda:P\to P$ 如下，

$$\bar{A}_\lambda x(t) = \lambda\int_0^1 k(t,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s。$$

容易验证，对于固定的 λ，$\bar{A}_\lambda:P\to P$ 是一个全连续算子。

若 $x\in P$ 且 $\|x\|=r$，取

$$\bar{\lambda} = \frac{16r}{3\int_0^1 k(s,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s}。$$

当 $\lambda>\bar{\lambda}$ 时，

$$\|\bar{A}\lambda x\| = \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 k(t,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\max_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}\lambda\int_0^1 t(1-t)k(s,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s >$$
$$\frac{3}{16}\lambda\int_0^1 k(s,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\frac{3}{16}\ \frac{16r}{3\int_0^1 k(s,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s}\times$$
$$\int_0^1 k(s,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s = r = \|x\|。$$

对于固定的 $\lambda>\bar{\lambda}$，由(H1)知，存在足够小的 $r_1(0<r_1<r)$，使得

$$0\leqslant f(t,x)\leqslant\frac{6x}{\lambda\gamma}(0\leqslant x\leqslant r_1),\ t\in[0,0]。$$

若 $x\in P$ 且 $\|x\|=r_1$，则

$$\|\bar{A}\lambda x\| = \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 k(t,s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\lambda\int_0^1 \gamma e(s)\bar{f}(s,x(s))\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\lambda\int_0^1 \gamma s(1-s)\ \frac{6x(s)}{\lambda\gamma}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\int_0^1 6s(1-s)\|x\|\mathrm{d}s \leqslant \|x\|。$$

令 $M=\max_{x\in[0,r]}f(t,x)$，对于固定的 $\lambda>\bar{\lambda}$，存在足够大的 $r_2(r_2>r)$，使得 $r_2\geqslant\frac{1}{6}\lambda\gamma M$。

若 $x\in P$ 且 $\|x\|=r_2$，则

$$\begin{aligned}\|\bar{A}\lambda x\| &= \max_{t\in[0,1]}\lambda\int_0^1 k(t,s)\bar{f}(s,x(s))\,ds \leqslant \\ &\lambda\int_0^1 \gamma e(s)\bar{f}(s,x(s))\,ds \leqslant \\ &\lambda\int_0^1 \gamma s(1-s)M\,ds \leqslant \\ &\frac{1}{6}\lambda\gamma M \leqslant r_2 = \|x\|。\end{aligned}$$

应用引理(2.3)知，算子 $\bar{A}_\lambda$ 在 P 中至少有两个不动点，即边值问题(2)至少有两个正解。

下面,证明边值问题(2)的解满足 $0\leqslant x(t)\leqslant r$，从而它也是边值问题(1)的解。

$x(t)$ 的非负性是显然的,只需证 $x(t)\leqslant r$。反证:假设 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 处取得最大值,且 $x(t_0)>r$,由

$$x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\,ds,\ 0 < \int_0^1 a(s)\,ds < 1。$$

可知 $t_0\neq 1$,即 $t_0\in(0,1)$。又因为 $x(t)\in C[0,1]$，所以存在 $\alpha,\beta\in(0,1)$，满足 ：

1) $x(\alpha)=x(\beta)=r,\ t_0\in(\alpha,\beta)$；

2) $x(t)\geqslant r,\ \forall t\in(\alpha,\beta)$；

因而,对任意 $t\in(\alpha,\beta)$，$x''(t)=-\bar{f}(t,x(t))=0$。由此可得，$x'(t)$ 在 (α,β) 中是常值函数。因为 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 中是常值函数。因此处取得最大值,所以 $x'(t_0)=0$。因而 $x'(t)=0,\ \forall t\in(\alpha,\beta)$。由上可得 $x(t)$ 在 (α,β) 中是常值函数,与 $x(t_0)>x(\alpha)$ 矛盾。

综上,不存在 t_0，使得 $x(t_0)>r$，即 $x(t)\leqslant r$ 恒成立。

通过以上讨论可知式(1)至少有两个正解。

参　考　文　献

1　Hendenson J, Wang H. Positive solutions of nonlinear eigenvalue problems. J Math Appl, 1997; 208: 252—259

2　Erbe L H, Wang H. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations. Trans Amer Math Soc, 1994; 120: 143—748

3　Lee Y. A multiplicicty results of positive solutions for the generalized Gel′fand type singular boundary value problem. Nonlinear Anal, 1997; 30: 3829—3835

4　Agarwal R P, Wang F, Lian W. Positive solutions for nonlinear singular boundary value problems. Comput Math Appl, 1998; 35: 81—87

5　O′Regan D. Singular differential equations with linear and nonlinear boundary condition. J Math Appl, 1998: 35: 81—87

6　Feng M, Ji D, Ge W. Positive solutions for a class of boundary value problem with integral boundary conditions in Banach spaces. J Comput Appl, Math, 2008; 222: 351—363

7　Li Y, Li F. Sign-changing solutions for second order integral boundary value problems. Nonlinear Anal, 2008; 69: 1179—1187

8　Zhang X Q, Sun J X. On multiple for second order integral boundary value problems. Electron J Differential Equations, 2010; 44: 1—15

9　Guo D J, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in abstract cone. New York: Academic Press Inc, 1988

Positive Solutions for Some Second-order Integral Boundary Value Problems with Parameter

DONG Sheng

(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, P. R. China)

[**Abstract**] By employing Krasnosel'skii fixed point theorem, with the existence of positive solutions for the following second－order integral boundary value problem are concerned:

$$\begin{cases} x'' + \lambda f(t,x(t)) = 0,\ 0\leqslant t\leqslant 1, \\ x(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 a(s)x(s)\,ds, \end{cases}$$

where $f\in C([0,1]\times R,R)$, $0 < \int_0^1 a(s)\,ds < 1$。

[**Key words**] integral boundary value problem　　positive solutions　　fixed point theorem