第11卷 第23期 2011年8月
1671—1815(2011)23-5615-02

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 11 No. 23 Aug. 2011

二个均值渐近公式

吉耀武

(西安铁路职业技术学院基础部,西安 710016)

摘 要 引入了一个新的数论函数,并利用解析方法及可乘性质研究了这个数论函数的均值性质,给出了这个数论函数的二个均值渐近公式。

关键词 数论函数 均值 渐近公式

中图法分类号 O156.4; **文献标志码** A

1 引言及结论

众所周知,数论函数的均值性质在解析数论研究中占有十分重要的位置,许多著名的数论难题都与之密切相关。因而其研究工作具有十分重要的理论意义。关于这一问题,文献[1,2]中作过一些研究,并得到了许多重要理论价值的成果。本文的主要目的是引入一个新的数论函数 $R(n)$,其定义如下

$$R(1)=1。$$

对任意素数 p 及正整数 α,定义 $R(p^{\alpha})=\alpha$,当正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时,定义 $R(n)=R(p_1^{\alpha_1})\cdots R(p_k^{\alpha_k})=\alpha_1\cdots\alpha_k$。

这样定义的数论函数显然是可乘的,但不是完全可乘函数,本文的主要目的是研究$\frac{R(n)}{n}$的均值性质,并利用解析方法证明下面两个有趣的定理。

定理1 对任意实数 $x\geqslant 1$,有渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{R(n)}{n}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2-p}\right)\ln x+O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x)。$$

其中:ε 为任意给定的正实数; $\prod\limits_p$ 表示对所有素数 p 求积。

定理2 对任意实数 $x>1$,有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{nR(n)}=\frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1-\frac{p\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+1}{p+1}\right)\ln x+O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x)。$$

2 定理的证明

首先证明定理1,对任意复数 s(Re $s>1$),引入函数

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^k(n)}{n^s}。$$

显然,当 $Re(s)>1$ 时,$f(s)$是绝对收敛的,于是由 Euler 积公式(文献[1]中定理11.7)和 $R(n)$的可乘性质可得

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R(n)}{n^{s+1}}=\prod_p\left(1+\frac{R(p)}{p^{s+1}}+\frac{R(p^2)}{p^{2(s+1)}}\cdots+\frac{R(p^n)}{p^{n(s+1)}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{(s+1)}}+\frac{2}{p^{2(s+1)}}+\cdots+\frac{n}{p^{n(s+1)}}+\cdots\right)=$$

$$\prod_p\frac{1+\frac{1}{p^{2(s+1)}-p^{(s+1)}}}{1-\frac{1}{p^{(s+1)}}}=\zeta(s+1)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{2(s+1)}-p^{(s+1)}}\right)。$$

其中 $f(s)=\prod\limits_p\left(1+\frac{1}{p^{2(s+1)}-p^{(s+1)}}\right)$。

在 Perron 公式(参阅文献[4]中定理(6.2)中取 $b=\frac{3}{2}$,$T>2$,可得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{R(n)}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-iT}^{\frac{3}{2}+iT}\zeta(s+1)f(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{T}\right)。$$

2011年4月28日收到,5月10日修改 陕西省自然科学基金项目(SJ08A28)资助

作者简介:吉耀武(1965—),男,河南温县人,副教授,研究方向:数学及其应用。

在上式积分线移至 $Res = \frac{1}{2} + \varepsilon$ 处，此时经过被积函数在 $s = 0$ 处的一阶极点，其留数为 $\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2 - p}\right)$，于是取 $T = x$ 可得

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{R(n)}{n} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2 - p}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}+\varepsilon+iT} f(s)\frac{x^s}{s}ds + O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2 - p}\right)\ln x + O\left(\int_{-T}^{T} \left| f\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + it\right)\right| \frac{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{1 + |t|}dt\right) + O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^2 - p}\right)\ln x + O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x)。$$

这就证明了定理 1。

同理设

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R(n)n^{s+1}}。$$

则由 Euler 积公式可得

$$g(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{s+1}} + \frac{1}{2p^{2(s+1)}} + \cdots + \frac{1}{np^{n(s+1)}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 - \ln\left(1 - \frac{1}{p^{(s+1)}}\right)\right) = \prod_p \left(1 - \ln\left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right) - \frac{1}{p^{s+1}} + \frac{1}{p^{s+1}}\right) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{s+1}}\right)\prod_p \left(1 - \frac{\ln(1 - \frac{1}{p^{s+1}}) + \frac{1}{p^{s+1}}}{1 + \frac{1}{p^{s+1}}}\right) = \frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2(s+1))}\prod_p \left(1 - \frac{p^{s+1}\ln(1 - \frac{1}{p^{s+1}}) + 1}{p^{s+1} + 1}\right)。$$

由于 $-\ln(1 - x) = x + O(x^2)$，于是 $\ln\left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right) + \frac{1}{p^{s+1}} \ll \frac{1}{p^{2(s+1)}}$，所以

$$\prod_p \left(1 - \frac{\ln(1 - \frac{1}{p^{s+1}}) + \frac{1}{p^{s+1}}}{1 + \frac{1}{p^{s+1}}}\right) = \prod_p \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{2s+2}}\right)\right)。$$

从而当 $s = 0$ 时，$\prod_p \left(1 - \frac{\ln(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}}\right)$ 是绝对收敛的非零常数，然后由 Perron 公式以及证明定理 1 的方法，并注意到 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$，容易得到

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{nR(n)} = \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 - \frac{p\ln(1 - \frac{1}{p}) + 1}{p + 1}\right)\ln x + O(x^{-\frac{1}{2}}\ln x)。$$

于是完成了定理 2 的证明。

参 考 文 献

1 Apstol T M. Introduction to analytic number theory. New York: Springer-Verlag, 1976

2 Pan Chengdong, Pan Chengbiao. Foundation of analytic number theory. Beijing: Science Press, 1997

3 苟 素. 关于因子积函数的均值. 西北大学学报(自然科学网络版), 2004; (2): 6—9

4 陈 斌. 关于 Smarandache 可乘函数的一个猜测的两个结果. 科学技术与工程, 2008, (12): 3260—3262

5 黄 炜, 赵教练. 关于 Smarandach 平方根部分数列 $a-2(n)$ 和 $b-(2n)$. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2010; 27(b): 52—54

Two's Mean Value Asymptotic Formula

JI Yao-wu

(Department of Basis, Xi'an Railway Vocational & Technical Institut, Xi'an 710016, P. R. China)

[**Abstract**] A new arithmetical function is introduced, by using analytical method and can take properties to study mean properties of this arithmetical functions, and two' s mean value asymptotic formulas about its are given.

[**Key words**] arithmetical function mean value asymptotic formula