第11卷 第20期 2011年7月
1671—1815(2011)20-4828-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 11 No. 20 July 2011
© 2011 Sci. Tech. Engng.

半直线上二阶三点边值问题正解的存在性

刘 琦 黄明明 路慧芹
(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

摘 要 研究了如下半直线上二阶三点微分方程的边值问题,建立了特殊的锥,主要利用锥中的不动点定理得到了正解的存在性结果。

$$\begin{cases} -x''=f(t,x),t\in J\in[0,+\infty), \\ x(0)=\alpha x(\eta),x'(\infty)=0。\end{cases}$$

关键词 半直线 正解 不动点定理 锥
中图法分类号 O175.8; **文献标志码** A

半直线上边值问题在现阶段已有了广泛的研究,人们越来越关注半直线上边值问题正解的存在性,并取得了优秀的成果,如文献[1,2].本文用锥拉压不动点定理考虑了如下边值问题(BVP)正解的存在性

$$\begin{cases} -x''=f(t,x),t\in J\in[0,+\infty) \\ x(0)=\alpha x(\eta),x'(\infty)=0 \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中$f\in C(J\times J,J)$,$0\leqslant\alpha<1$,$\eta\in(0,+\infty)$。最近连海容在文献[1]中主要用Leray-Schauder连续定理得到了此边值问题解的存在性,本文应用锥上不动点理论,建立了在一些条件下正解的存在性定理。

1 准备工作

引理1[1] 对$\forall v(t)\in L^1[0,+\infty)$且$tv(t)\in L^1[0,+\infty)$,边值问题

$$\begin{cases} -x''=v(t),t\in[0,+\infty), \\ x(0)=\alpha x(\eta),x'(\infty)=0,(0\leqslant\alpha<1)。\end{cases}$$

有唯一解

$$x(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)v(s)\mathrm{d}s。$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} s, & 0\leqslant s\leqslant\min\{\eta,t\}<+\infty, \\ \alpha(s-t)+t, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta<+\infty, \\ \alpha(\eta-s)+s, & 0<\eta\leqslant s\leqslant t<+\infty, \\ \alpha(\eta-t)+t, & 0<\max\{\eta,t\}\leqslant s<+\infty。\end{cases}$$

显然$G(t,s)\geqslant0$,$\forall 0\leqslant t,s<+\infty$,并且文献[1]中给出$G(t,s)\leqslant\frac{s}{1-\alpha}$。对$\forall s,t\in[0,+\infty)$,$\frac{G(t,s)}{1+t}$是有界的。事实上,

$$\frac{G(t,s)}{1+t}=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} \frac{s}{1+t}, & 0\leqslant s\leqslant\min\{\eta,t\}<+\infty, \\ \frac{\alpha(s-t)+t}{1+t}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta<+\infty, \\ \frac{\alpha(\eta-s)+s}{1+t}, & 0<\eta\leqslant s\leqslant t<+\infty, \\ \frac{\alpha(\eta-t)+t}{1+t}, & 0<\max\{\eta,t\}\leqslant s<+\infty, \end{cases} \leqslant$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases} 1, & 0\leqslant s\leqslant\min\{\eta,t\}<+\infty, \\ \eta, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta<+\infty, \\ \alpha\eta+(1-\alpha), & 0<\eta\leqslant s\leqslant t<+\infty, \\ \alpha\eta+(1-\alpha), & 0<\max\{\eta,t\}\leqslant s<+\infty。\end{cases}$$

所以存在$M>0$,使得$\left|\frac{G(t,s)}{1+t}\right|<M$,$\forall s,t\in[0,+\infty)$。

引理2 对任意常数$0<a<b<+\infty$,都存在

2011年4月6日收到 山东省高等学校科技计划项目(J09LA08)资助

第一作者简介:刘 琦(1987—),山东省曲阜市人,硕士研究生,研究方向:非线性微分方程。

$0<c<1$，使 $\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant c\ \frac{G(r,s)}{1+r}$，$t \in [a,b]$，$r$，$s \in [0,+\infty)$。

证明：当 $t\in[a,b]$ 时有

$$\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{1+b}\begin{cases} s, & 0\leqslant s\leqslant \min\{\eta,t\}<+\infty, \\ a>0, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant \eta<+\infty, \\ \eta>0, & 0<\eta\leqslant s\leqslant t<+\infty, \\ \alpha\eta+(1-\alpha)a>0, & 0<\max\{\eta,t\}\leqslant s<+\infty。\end{cases}$$

$$\frac{G(r,s)}{1+r} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{1+r}\begin{cases} s, & 0\leqslant s\leqslant \min\{\eta,r\}<+\infty, \\ \alpha(s-r)+r, & 0\leqslant r\leqslant s\leqslant \eta<+\infty, \\ \alpha(\eta-s)+s, & 0<\eta\leqslant s\leqslant r<+\infty, \\ \alpha(\eta-r)+r, & 0<\max\{\eta,r\}\leqslant s<+\infty。\end{cases}$$

0 首先，当 $0\leqslant s\leqslant \min\{\eta,t\}<+\infty$ 时，易验证

$$\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant \frac{1}{2(1+b)}\frac{G(r,s)}{1+r},\ \forall t\in[a,b],r,s\in[0,+\infty)。$$

其次，当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant \eta<+\infty$ 时，$\exists C_1>0$ 使得

$$\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant \frac{a}{(1-\alpha)(1+b)} \geqslant C_1 M \geqslant C_1\frac{G(r,s)}{1+r},$$

$\forall t\in[a,b],r,s\in[0,+\infty)$。

同理当 $0<\eta\leqslant s\leqslant t<+\infty$ 时，$\exists C_2>0$，使得

$$\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant C_2\frac{G(r,s)}{1+r},\ \forall t\in[a,b],r,s\in[0,+\infty)。$$

当 $0<\max\{\eta,t\}\leqslant s<+\infty$ 时，$\exists C_3>0$，使得

$$\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant C_3\frac{G(r,s)}{1+r},\ \forall t\in[a,b],$$

$r,s\in[0,+\infty)$。

取 $C=\min\left\{\frac{1}{2(1+b)},C_1,C_2,C_3\right\}<1$，则结论成立。

取定 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，则 $\exists 0<C<1$，使得

$$\frac{G(t,s)}{1+t} \geqslant c\frac{G(r,s)}{1+r},t\in[a,b],r,s\in[0,+\infty)。$$

设 $E=\left\{x\in C[0,+\infty): \sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\frac{|x(t)|}{1+t}<+\infty\right\}$，在 E 上定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}\frac{|x(t)|}{1+t}$，则 $(E,\|x\|)$ 是 Banach 空间。令 $P=\left\{x\in E: x(t)\geqslant 0 \text{ 且 } \min\limits_{t\in[a,b]}\frac{x(t)}{1+t}\geqslant c\frac{x(r)}{1+r},r\in J\right\}$，则 $P\subset E$ 是 E 中的锥。

有以下假定：

(H_1) 存在常数 $\lambda,\mu(1<\lambda\leqslant\mu)$，使得对 $\forall t\in(0,+\infty),x\in(0,+\infty)$ 有

$$e^{\mu}f(t,x)\leqslant f(t,ex)\leqslant e^{\lambda}f(t,x),0<e\leqslant 1。$$

(H_2) $\int_0^{+\infty}f(t,1+t)\mathrm{d}t<+\infty,\int_0^{+\infty}tf(t,1+t)\mathrm{d}t<+\infty$。

(H_3) $f(t,1)$ 在 $t\in[a,b]$ 上不恒等于零。

定义 P 上算子 A：

$$(Ax)(t)=\int_0^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \qquad (2)$$

则 A 的不动点 $x(t)$ 就是 BVP(1)的解.

引理 3[3]　设 P 是实 Banach 空间 X 中的锥，Ω_1,Ω_2 是 X 中的有界开集，$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2,A:P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to P$ 全连续，如果满足：

(1) $\|Ax\|\leqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|Ax\|\geqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_2$ 或

(2) $\|Ax\|\geqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_1$，$\|Ax\|\leqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_2$。

那么 A 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中必有不动点。

引理 4[2]　设 W 为 P 中的有界集，若 $\left\{\frac{W(t)}{1+t}\right\}$ 在 $[0,+\infty)$ 的任何子区间上等度连续且对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $t_1,t_2\geqslant N$ 时，有

$$\left|\frac{x(t_1)}{1+t_1}-\frac{x(t_2)}{1+t_2}\right|<\varepsilon。$$

关于 $x\in W$ 一致成立，则 W 是 P 中相对紧集，其中 $W(t)=\{x(t):x\in W\},t\in J$。

引理 5　若条件 (H_1)，(H_2) 满足，则 $A:P\to P$ 为全连续算子。

证明：对 $\forall x\in P$，取 $k\geqslant\max\{1,\|x\|\}$，由 (H_1) 知

$f(t,x)\leqslant k^{\mu}f\left(t,\frac{x}{k}\right)\leqslant k^{\mu-\lambda}\left(\frac{|x(t)|}{1+t}\right)^{\lambda}f(t,1+t)\leqslant k^{\mu-\lambda}\|x\|^{\lambda}f(t,1+t)$，$G(t,s)$ 的性质及 f 的连续性易证 $A:P\to P$ 连续，又由引理 4 易证 A 是全连续的。

2　主要结果

定理 1　设条件 (H_1)—(H_3) 满足，则边值问题

式(1)有 $C[0,+\infty)$ 正解。

证明:因为 $f(t,1)$ 在 $t\in[a,b]$ 上不恒等于零,可取 $B=\int_a^b \frac{G(1,s)}{2}f(s,1)\mathrm{d}s>0$,取

$$R>\max\left\{1,\frac{1}{c(1+a)},c^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(1+a)^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}B^{\frac{1}{1-\lambda}}\right\},$$

$$r<\min\{1,(\int_0^{+\infty}Mf(s,1+s)\mathrm{d}s)^{\frac{1}{1-\lambda}}\},$$

作 $\Omega_R=\{x\in P:\|x\|<R\}$,$\Omega_r=\{x\in P:\|x\|<r\}$。

(1) $\forall x\in\partial\Omega_R$,有 $\|x\|=R$,且

$$\min_{t\in[a,b]}\frac{x(t)}{1+t}\geqslant c\|x\|=cR,$$

所以对 $\forall t\in[a,b]$,

$$x(t)\geqslant cR(1+t)\geqslant c(1+a)R\geqslant 1。$$

由(H_1)知,$\forall t\in[a,b]$,有

$$f(t,x(t))\geqslant x(t)^{\lambda}f(t,1)\geqslant c^{\lambda}(1+a)^{\lambda}R^{\lambda}f(t,1),$$

故

$$\|Ax\|=\sup_{t\in[0,+\infty)}\int_0^{+\infty}\frac{G(t,s)}{1+t}f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant \int_0^{+\infty}\frac{G(1,s)}{2}f(s,x(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_a^b c^{\lambda}(1+a)^{\lambda}R^{\lambda}\times \frac{G(1,s)}{2}f(s,1)\mathrm{d}s=c^{\lambda}(1+a)^{\lambda}R^{\lambda}B\geqslant R=\|x\|。$$

(2) $\forall x\in\partial\Omega_r$,由$(\mathrm{H}_1)$得

$$\|Ax\|\leqslant\int_0^{+\infty}Mf(s,x(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{+\infty}M\left(\frac{x(s)}{1+s}\right)^{\lambda}f(s,1+s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{+\infty}Mf(s,1+s)\mathrm{d}s\|x\|^{\lambda}\leqslant r^{\lambda}\int_0^{+\infty}Mf(s,1+s)\mathrm{d}s\leqslant r=\|x\|。$$

所以由引理4知,A 在 $\overline{\Omega_R}\setminus\Omega_r$ 中有不动点 $x(t)$,即 $x(t)$ 为BVP(1)的一个正解。

参考文献

1 Lian H R. Solvability for second-order three-point boundary value problems on a half-line. Applied Mathematics Letters, 2006; 19: 1000—1006

2 Liu Y. Existence and unboundedness of positive solutions for singular boundary value problems on half-line. Appl Math Comput, 2003; 144: 543—556

3 郭大均. 非线性泛函分析. 第二版. 济南:山东大学出版社,2000

The Existence of Positive Solutions for Second-order Three-point Boundary Value Problems on Half-line

LIU Qi, HUANG Ming-ming, LU Hui-qin

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**] This work is concerned with the existence of a second-order three-point boundary value problems on the half-line

$$\begin{cases}-x''=f(t,x),t\in J\in[0,+\infty),\\ x(0)=\alpha x(\eta),x'(\infty)=0。\end{cases}$$

A special cone is establish, mainly used the fixed point theorem theory in the cone to get the existence of positive solutions.

[**Key words**] half-line positive solutions fixed point theorem cone