第 11 卷　第 18 期　2011 年 6 月
1671—1815(2011)18-4298-02

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 18　June 2011
© 2011　Sci. Tech. Engng.

研究简报

数学

超富足半群的一个构造方法

蔡　楠[1]　孔德斌[2]
(烟台南山学院公共教学部[1],旅游管理学院[2],烟台 265713)

摘　要　引入结构函数的概念,并借助完全单半群和半格,建立了超富足半群的结构定理,推广了文献的结果。

关键词　超富足半群　　完全单半群　　半格　　结构函数。
中图法分类号　O152.7;　　　**文献标志码**　A

1982 年,J. B. Fountain 把完全正则半群是完全单半群的半格推广到了富足半群上,并介绍了 Green-＊ 关系,证明了半群 S 是超富足的当且仅当 S 是完全单半群的半格,而且在文献[2]中又证明了半群 S 是超富足的和单的当且仅当 S 是完全单的。随后许多作者又研究了富足半群和超富足半群,在此基础上相继取得了一系列成果,例如,A. El-Qallali[1],M. V. Lawson[3] 等等。通过用完全单半群,半格和结构函数给出了构造超富足半群的一种新方法,推广了文献[4]中的结果。

1　引理及预备知识

定义 1　半群 S 是富足的,如果 S 中的任一个 L^*-类和 R^*-类都至少含有一个幂等元。

定义 2　半群 S 是超富足的,如果它的任一个 H^*-类都含有唯一的幂等元。

引理 1　半群 S 是超富足的和 J^*-单的当且仅当 S 是完全 J^*-单半群。

引理 2　半群 S 是超富足的和 J^*-单的当且仅当 S 是完全 J^*-单半群的半格。

引理 3　设 S 是超富足半群,则 S 中的 Green 关系 J^* 是最小的半格同余,即,$Y=S/J^*$。

由以上引理可知,对于一个超富足半群 S 而言,可以表示为

$$S=\cup_{\partial\in Y}S_\partial \tag{1}$$

式(1)中 $S_\partial,\partial\in Y$ 是完全 J^*-单半群,$S_\partial\cap S_\beta=\varphi$,$\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in Y$,每个 S_α 是 S 的一个 J^*-类,J^* 是同余且 $S/J^*=Y$ 为半格。式(1)称为超富足半群的完全 J^*-单半群的半格分解,令:

$\varphi:S\to Y$ $a\mapsto\alpha$ 如果 $a\in S_\partial$,则 φ 是 S 到 Y 的自然同态。

2　超富足半群的结构函数

考虑这样一个问题,即如果已经知道一组完全 J^*-单半群 $S_\alpha,\alpha\in Y,Y$ 为半格,那么应怎样将它们合成为一个超富足半群 S,使得 S 的每个 J^*-类是刚好已知的各 S_α。

定理 1　设 $\{S_\alpha|\alpha\in Y\}$ 为一族互不相交的完全 J^*-单半群,Y 为半格,如果 $\{\varphi_{\alpha,\beta}\alpha,\beta\in Y\}$ 为一族函数,其中 $\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\times S_\beta\to S_{\alpha,\beta}$,满足

(1) 对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$;任意的 $a\in S_\alpha,b\in$

2011 年 3 月 7 日收到

$S_\beta, c\in S_\gamma$,有

$$\varphi_{\alpha\beta,\gamma}(\varphi_{\alpha,\beta}(a,b),c)=\varphi_{\alpha,\beta\gamma}(a,\varphi_{\alpha,\beta}(b,c));$$

(2) 对于任意的 $\alpha\in Y$,任意的 $a,b\in S_\alpha$,有

$$\varphi_{\alpha,\alpha}(a,b)=ab\ (中的乘积)。$$

在 $S=\cup_{\alpha\in Y}S_\alpha$ 中,定义

$$a\ b=\varphi_{\alpha,\beta}(a,b), a\in S_\alpha, b\in S_\beta。$$

则$(S,\cdot)$是超富足半群,其中每个完全 J^*-单半群分量恰为一个 $S_\alpha,\alpha\in Y$。

反之,任何一个超富足半群都可如此构造。

证明　由条件(1),S 上所有定义的乘法"·"满足结合律。由条件(2),S 中乘法与 S_α 中原有的乘法一致。

在 S 中定义关系:$a\eta b\Leftrightarrow a,b$ 同属一个 S_α。

显然,η 是等价关系,因为 S_α 互不相交,η 是同余关系。事实上,设 $a\eta b, a,b\in S_{\alpha,} \alpha\in Y$;任取 $c\in S_\beta,\beta\in Y$,则 $a\cdot c=\varphi_{\alpha,\beta}(a,c)\in S_{\alpha\beta} b\cdot c=\varphi_{\alpha,\beta}(b,c)\in S_{\alpha\beta}$

所以 $a\cdot c\eta b\cdot c$。同样可证:$b\cdot a\eta c\cdot b$。而 $S/\eta=Y$,故 η 是 b 半格同余。即 S 是$\{S_\alpha | \alpha\in Y\}$的半格,由引理 2 知,$S$ 为超富足半群。

下面证明,S 中每个 $S_\alpha,\alpha\in Y$,恰为 S 的一个 J^*-类。

首先,设 $a\eta b, a,b\in S_\alpha;\alpha\in Y$,由于 S_α 是完全 J^*-单半群,在 S_α 中 a 与 b 有 J^* 关系,即 $S_\alpha eS_\alpha=S_\alpha fS_\alpha$,其中 eH^*a, fH^*b,故存在 $u,v,s,t\in S_\alpha$,使得

$$veu=f, e=sft \tag{3}$$

由于在 S 中乘法与 S_α 中乘法一致,故式(3)也看成了 S 中的等式,因而在 S 中仍有 a 与 b 有 J^* 关系。其次,如果 a 与 b 在 S 中有 J^* 关系,则 $SeS=SfS$。

其中 eH^*a, fH^*b,故有 $u,v,s,t\in S, a\in S_\alpha, b\in S_\beta, c\in S_\gamma, u\in S_\delta, v\in S$　$, s\in S_\theta, t\in S_\sigma, \alpha,\beta,\gamma,\delta,$　$,\theta,\sigma\in Y$,使得

$$ve\delta=f, e=sft \tag{4}$$

用自然同态 φ 作用于式(4)两端,得

$$\overline{w}\alpha\delta=\beta, \alpha=\theta\beta\sigma \tag{5}$$

由式(5)及文献[1]中关于半格中半序关系的定义,可知 $\beta\alpha=\overline{w}\alpha\delta\alpha=\overline{w}\alpha^2\delta=\overline{w}\alpha\delta=\beta$。所以 $\beta\leqslant\alpha$。同样,因而 $\alpha=\beta$,即 a,b 同属于一个 $S_\alpha, a\eta b$。由此知,S 是完全 J^* 单半群 $S_\alpha,\alpha\in Y$ 的半格,即 S 是超富足半群。

反之,设 S 是超富足半群,由引理 2,S 是其 J^*-类半格,每个 J^*-类是一个完全 J^*-单半群,设其 J^*-类记为 $S_\alpha,\alpha\in Y$,Y 为半格。构造函数 $\varphi_{\alpha,\beta}$定义为:$\varphi_{\alpha,\beta}:S_\alpha\times S_\beta\rightarrow S_{\alpha,\beta}(a,b)\mapsto a\cdot b$

由于 $a\in S_\alpha, b\in S_\beta$,所以 $ab\in S_{\alpha\beta}$,在 S 中乘法的结合律决定了定理 1 中条件(1) 成立,又由于在 S_α 中乘法自然与 S 中乘法一致。所以条件(2)也成立。证毕。

参 考 文 献

1 El-Qallali A, L^*-unipotent semigroups. J Pure and Applied Algebra, 1989;62:19—33

2 Fountain J B, Abundant semigroups. Proc London Math Soc, 1982;44(3):103—129

3 Lawson M V. The natural partial order on an abundant semigroup, Proc. Edinburgh Math Soc, 1987;30:169—186

4 Bi X D. 完全正则半群的一个构造方法,山东大学学报(理学版),2007;42:40—43

A Constructing Method for Superabundant Semigroup

CAI Nan[1], KONG De-bin[2]

(Branch of Normal Teaeh[1], School of Tourist Management[2], Yantai Nanshan University, Yantai 265713, P. R. China)

[**Abstract**] A constructing method for superabundant semigroups is offered by using completely J^*-simple semigroups, semilattice and constructing functions。

[**Key words**]　superabundant semigroups　completely J^*-simple semigroups　semilattice　constructing function