第11卷 第26期 2011年9月
1671—1815(2011)26-6253-05
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 11 No. 26 Sep. 2011
© 2011 Sci. Tech. Engrg.

非线性分数阶微分方程奇异边值问题的唯一解

于 瑶
(大连教育学院,大连 116021)

摘 要 研究了非线性分数阶微分方程边值问题 $D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0,0<t<1;u(0)=u(1)=u'(0)=0$,的 Green 函数及其性质,其中 $2<\alpha\leqslant 3$ 是实数,D_{0+}^{α} 是标准 Riemann-Liouville 型微分,并利用锥不动点定理和混合单调方法证明了奇异边值问题解的唯一性。最后举例加以说明。

关键词 分数阶微分方程 奇异边值问题 唯一解 分数阶格林函数 不动点定理
中图法分类号 O175.8; 文献标志码 A

近些年来,分数阶微分方程已经成为国内外研究的一个热点,受到人们越来越多的关注和研究。基于目前人们对分数阶微分方程的广泛研究,因此深入探讨非线性分数阶微分方程边值问题解的性质有着广泛的理论和现实意义[1—7]。

文献[8]的作者应用 Krasnoselskiis 不动点理论、混合单调算子的唯一不动点理论研究了非线性分数阶微分方程边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+\lambda f(t,u(t))=0,0<t<1,$$
$$u(0)=u'(0)=u'(1)=0,$$

正解的多重性和唯一性,其中 $2<\alpha<3$ 是实数,参数 λ 是正常数,D_{0+}^{α} 是标准 Riemann-Liouville 型微分,$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的,并且 $f(t,u)$ 可能在 $t=0$ 或者 $t=1$ 处有奇性。

据我们所知,到目前为止没有任何关于如何解决如下问题解的唯一性的文章。

$$\begin{aligned}&D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0,0<t<1,\\&u(0)=u(1)=u'(0)=0\end{aligned}\tag{1}$$

式(1)中 $2<\alpha\leqslant 3$ 是实数,D_{0+}^{α} 是标准Riemann-Liouville 型微分,$f\in C[0,1]$。

本文类推了整数阶微分方程边值问题,首先我们获得了相应的Green函数,称之为分数阶Green函数,并且我们给出了 Green 函数的性质。通过 Green 函数把问题式(1) 等价转化为一个相应的 Fredholm 积分方程。最后,应用混合单调方法得到方程解的唯一性。

2011 年 3 月 4 日收到
作者简介:于 瑶。E-mail:yuyao2001@yahoo.cn。

1 预备知识

首先,我们给出一些必要的分数阶微积分理论的定义。

定义 1[9] 连续函数 $y:(0,\infty)\to R$ 的 α 阶 $(\alpha>0)$Riemann-Liouville 分数阶积分定义如下:

$$I_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\,\mathrm{d}s,$$

假设右边是逐点定义在$(0,\infty)$上的。

定义 2[9] 连续函数 $y:(0,\infty)\to R$ 的 α 阶 $(\alpha>0)$Riemann-Liouville 分数阶微分定义如下:

$$D_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$,$[\alpha]$表示α的整数部分,假设右边是逐点定义在$(0,\infty)$上的。

由上述 Riemann-Liouville 微积分定义,我们可以得到以下结论。

引理 1[9] 令 $\alpha>0$,如果我们假设 $u\in C(0,1)\cap L(0,1)$,那么分数阶微分方程 $D_{0+}^{\alpha}u(t)=0$ 有唯一解 $u(t)=C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+\ldots+C_Nt^{\alpha-N}$;$C_i\in R,i=1,2,\ldots,N$,其中$N$是大于或等于$\alpha$的最

小整数。

引理2[9] 假设 $u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，且具有 α 阶($\alpha>0$)分数阶微分，则有 $I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+\dots+C_Nt^{\alpha-N}$；$C_i\in R,i=1,2,\dots,N$，其中 N 是大于或等于 α 的最小整数。

下面，我们将求出分数阶微分方程边值问题的 Green 函数。

引理3 给定 $h\in C[0,1]$ 且 $2<\alpha\leqslant 3$，分数阶微分方程

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+h(t)=0,0<t<1 \tag{2}$$

$$u(0)=u(1)=u'(0)=0 \tag{3}$$

的唯一解是 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$。

$$\text{其中}G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\[2ex] \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases} \tag{4}$$

这里称 $G(t,s)$ 是边值问题式(2)、式(3)的 Green 函数。

证明 由引理2，我们可以把式(2)转化为一个等价的积分方程

$$u(t)=-I_{0+}^{\alpha}h(t)+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+C_3t^{\alpha-3},$$

式中 $C_1,C_2,C_3\in R$。于是，方程(2)的解为

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+C_3t^{\alpha-3}。$$

由式(3)，我们有 $C_2=C_3=0$，以及 $C_1=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\times\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s$。

因此，问题式(2)、式(3)的唯一解是

$$\begin{aligned}u(t)&=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s=\\&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(1-s)^{\alpha-1}\times t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^1(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s=\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t[(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}]\times h(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^1(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}h(s)\mathrm{d}s=\\&\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

引理4 由式(4)得到的函数 $G(t,s)$ 具有如下性质：

(1) 对于 $\forall t,s\in(0,1)$，$G(t,s)=G(1-s,1-t)$；

(2) 对于 $\forall t,s\in(0,1)$，$\Gamma(\alpha)k(t)q(s)\leqslant G(t,s)\leqslant(\alpha-1)q(s)$；

(3) 对于 $\forall t,s\in(0,1)$，$\Gamma(\alpha)k(t)q(s)\leqslant G(t,s)\leqslant(\alpha-1)k(t)$。

其中 $k(t)=\dfrac{t^{\alpha-1}(1-t)}{\Gamma(\alpha)}$，$q(s)=\dfrac{s(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$。

(4) 对于 $\forall t,s\in(0,1)$，$G(t,s)>0$。

证明 由 $G(t,s)$ 的表达式，显然，对于 $\forall t,s\in(0,1)$，$G(t,s)=G(1-s,1-t)$，所以(1)成立。

当 $s\leqslant t$ 时，我们有 $1-t\leqslant 1-s$，则

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)G(t,s)&=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}=\\&(\alpha-1)\int_{t-s}^{t-ts}x^{\alpha-2}\mathrm{d}x\leqslant\\&(\alpha-1)(t-ts)^{\alpha-2}[(t-ts)-(t-s)]=(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}(1-t)s\leqslant\\&(\alpha-1)\times 1^{\alpha-2}\times(1-s)^{\alpha-2}(1-s)s=\\&(\alpha-1)(1-s)^{\alpha-1}s=\\&\Gamma(\alpha)(\alpha-1)q(s)。\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)G(t,s)&=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}=(t-ts)^{\alpha-2}(t-ts)-(t-s)^{\alpha-2}(t-s)\geqslant\\&(t-ts)^{\alpha-2}(t-ts)-(t-ts)^{\alpha-2}(t-s)=t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-2}(1-t)s\geqslant t^{\alpha-2}(1-t)s(1-s)^{\alpha-1}=\Gamma^2(\alpha)k(t)q(s)。\end{aligned}$$

当 $t\leqslant s$ 时，因为 $\alpha>2$，所以有

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)G(t,s)&=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\leqslant(\alpha-1)t^{\alpha-2}t(1-s)^{\alpha-1}\leqslant(\alpha-1)t^{\alpha-2}s(1-s)^{\alpha-1}\leqslant\\&(\alpha-1)\times 1^{\alpha-2}\times s(1-s)^{\alpha-1}=(\alpha-1)s(1-s)^{\alpha-1}=\Gamma(\alpha)(\alpha-1)q(s)。\end{aligned}$$

另一方面，

$$\Gamma(\alpha)G(t,s)=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\geqslant t^{\alpha-1}(1-t)s(1-s)^{\alpha-1}=\Gamma^2(\alpha)k(t)q(s)。$$

综上所述,性质(2) 成立。

由性质(1) 和性质(2) 知

$$\Gamma(\alpha)k(t)q(s) \leqslant G(t,s) = G(1-s,1-t) \leqslant (\alpha-1)q(1-t) = (\alpha-1)k(t)。$$

对于

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1。\end{cases}$$

由于 $\forall t,s \in (0,1)$, $t - ts \geqslant t - s$,且 $t(1-s) > 0$,所以性质(4) 成立。

令 K 是Banach空间 E 的正规锥,$e \in K$ 且 $\|e\| \leqslant 1$,$e \neq \theta$。

定义 $Q_e = \{x \in K \mid x \neq \theta$,存在常数 $m,M > 0$,使得 $me \leqslant x \leqslant Me\}$　　(5)

下面我们再给出一个定义。

定义 3[10]　假设 $A:Q_e \times Q_e \to Q_e$ 称为是混合单调的,如果对于固定的 $y \in Q_e$,$A(x,y)$ 关于 x 是单调不减的;对于固定的 $x \in Q_e$,$A(x,y)$ 关于 y 是单调不增的。例如,对于任意 $y \in Q_e$,如果 $x_1 \leqslant x_2(x_1,x_2 \in Q_e)$,则有 $A(x_1,y) \leqslant A(x_2,y)$;对于任意 $x \in Q_e$,如果 $y_1 \leqslant y_2(y_1,y_2 \in Q_e)$,则有 $A(x,y_1) \leqslant A(x,y_2)$。如果 $A(x^*,x^*) = x^*$,称 $x^* \in Q_e$ 是 A 的不动点。

引理 5[11]　假设 $A:Q_e \times Q_e \to Q_e$ 是混合单调算子,且存在常数 $\eta(0 \leqslant \eta \leqslant 1)$,使得对于任意 $x,y \in Q_e$ 以及 $0 < t < 1$,有 $A\left(tx,\frac{1}{t}y\right) \geqslant t^\eta A(x,y)$ 成立,则 A 有唯一不动点 $x^* \in Q_e$。

2　主要结论

假设(G_1):$f(t,x) = q(t)[g(x) + h(x)]$,$t \in (0,1)$,其中 $g:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 是连续、单调不减的;$h:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续、单调不增的。

由引理 4 的 *Green* 函数性质(3),我们知道存在 $a,n \in C[0,1]$,$a(t),n(s) > 0$,对于 $\forall t,s \in (0,1)$,有 $a(t)\dfrac{n(s)}{\Gamma(\alpha)} \leqslant G(t,s) \leqslant a(t)\dfrac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}$,$\forall t \in [0,1]$,$\forall s \in [0,1]$。

其中 $n(s) = s(1-s)^{\alpha-1}$,$a(t) = t^{\alpha-1}(1-t)$。显然 $\|a\| = \max\limits_{t\in[0,1]} a(t) < 1$。假设 $x(t)$ 是式(1) 的解,则

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, 0 \leqslant t \leqslant 1。$$

于是我们有

$$a(t)\int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)}n(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s \leqslant x(t) \leqslant a(t) \times \int_0^1 \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}f(s,x(s))\mathrm{d}s。$$

于是,若 $x(t)$ 是式(1) 的解,则 $x \in Q_e$。这正如性质(4) 所定义的,这里 $e(t) = t^{\alpha-1}(1-t) = a(t)$。

令 $K = \{x \in C[0,1] \mid x(t) \geqslant 0, \forall t \in [0,1]\}$,显然,$K$ 是 Banach 空间 $C[0,1]$ 中的正规锥。

定理 1　假设(G_1) 成立,且存在 $\eta \in (0,1)$,使得

$$g(tx) \geqslant t^\eta g(x), \forall t \in (0,1), \forall x > 0 \tag{6}$$

$$h(t^{-1}x) \geqslant t^\eta h(x), \forall t \in (0,1), \forall x > 0 \tag{7}$$

且当 $q \in C((0,1),(0,\infty))$ 时,有

$$\int_0^1 s^{1-\eta(\alpha-1)}(1-s)^{-\eta}q(s)\mathrm{d}s < +\infty \tag{8}$$

成立。则式(1) 有唯一解 x^*。

证明　因为式(7) 成立,令 $t^{-1}x = y$,我们有 $h(y) \geqslant t^\eta h(ty)$。则

$$h(ty) \leqslant \frac{1}{t^\eta}h(y), \forall t \in (0,1), y > 0 \tag{9}$$

令 $y = 1$,上述不等式变为

$$h(t) \leqslant \frac{1}{t^\eta}h(1), \forall t \in (0,1) \tag{10}$$

由式(7),式(9) 以及式(10),我们有

$$h(t^{-1}x) \geqslant t^\eta h(x), h\left(\frac{1}{t}\right) \geqslant t^\eta h(1), h(tx) \leqslant \frac{1}{t^\eta}h(x), h(t) \leqslant \frac{1}{t^\eta}h(1), \forall t \in (0,1), \forall x > 0。\tag{11}$$

类似由式(6),我们有

$$g(tx) \geqslant t^\eta g(x), g(t) \geqslant t^\eta g(1), \forall t \in (0,1), \forall x > 0 \tag{12}$$

令 $t = \dfrac{1}{x}$,我们有

$$g(x) \leqslant x^{\eta} g(1), x \geqslant 1 \tag{13}$$

令 $e(t) = a(t)$,我们定义如下:

$$Q_e = \{x \in P \mid \frac{1}{M}a(t) \leqslant x(t) \leqslant Ma(t), t \in [0,1]\} \tag{14}$$

式(14)中 $M > 1$,并使得

$$M > \max\left\{ \left\{ \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} q(s) a^{-\eta}(s)[g(1) + h(1)]ds \right\}^{\frac{1}{1-\eta}}, \left\{ \int_0^1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n(s) q(s) a^{\eta}(s)[g(1) + h(1)]ds \right\}^{-\frac{1}{1-\eta}} \right\} \tag{15}$$

对于 $\forall x, y \in Q_e$,我们定义如下:

$$A(x,y)(t) = \int_0^1 G(t,s) q(s)[g(x(s)) + h(y(s))]ds, \forall t \in [0,1] \tag{16}$$

首先我们证明 $A: Q_e \times Q_e \to Q_e$。

对于 $\forall x, y \in Q_e$,由式(12)以及式(13),我们有

$$g(x(t)) \leqslant g(Ma(t)) \leqslant g(M) \leqslant M^{\eta} g(1), \forall t \in (0,1)。$$

由式(11)我们有

$$h(y(t)) \leqslant h\left(\frac{1}{M}a(t)\right) \leqslant a^{-\eta}(t) h\left(\frac{1}{M}\right) \leqslant M^{\eta} a^{-\eta}(t) h(1), \forall t \in (0,1)。$$

则我们有

$$A(x,y)(t) \leqslant \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} a(t) q(s)[g(x(s)) + h(y(s))]ds \leqslant M^{\eta} a(t) \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} q(s) \times [g(1) + a^{-\eta}(s) h(1)]ds \leqslant M^{\eta} a(t) \int_0^1 \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} q(s) a^{-\eta}(s)[g(1) + h(1)]ds \leqslant Ma(t), \forall t \in [0,1]。$$

另一方面,对于 $\forall x, y \in Q_e$, $\forall t \in (0,1)$,由式(11)以及式(12),我们有

$$g(x(t)) \geqslant g\left(\frac{1}{M}a(t)\right) \geqslant a^{\eta}(t) g\left(\frac{1}{M}\right) \geqslant a^{\eta}(t) \frac{1}{M^{\eta}} g(1),$$

$$h(y(t)) \geqslant h(Ma(t)) \geqslant h(M) = h\frac{1}{\left(\frac{1}{M}\right)} \geqslant \frac{1}{M^{\eta}} h(1)。$$

于是,我们有

$$A(x,y)(t) \geqslant \int_0^1 a(t) \frac{n(s)}{\Gamma(\alpha)} q(s)[g(x(s)) + h(y(s))]ds \geqslant a(t) M^{-\eta} \int_0^1 \frac{n(s)}{\Gamma(\alpha)} q(s)[a^{\eta}(s) g(1) + h(1)]ds \geqslant a(t) M^{-\eta} \int_0^1 \frac{n(s)}{\Gamma(\alpha)} q(s) a^{\eta}(s)[g(1) + h(1)]ds \geqslant \frac{1}{M} a(t), \forall t \in [0,1]。$$

于是 A 正如所定义的,且有 $A(Q_e \times Q_e) \subset Q_e$。

对于任意 $l \in (0,1)$,我们有

$$A(lx, l^{-1}y)(t) = \int_0^1 G(t,s) q(s)[g(lx(s)) + h(l^{-1}y(s))]ds \geqslant \int_0^1 G(t,s) q(s)[l^{\eta} g(x(s)) + l^{\eta} h(y(s))]ds = l^{\eta} A(x,y)(t), \forall t \in [0,1]。$$

于是引理5成立,因此方程有唯一解 $x^* \in Q_e$,使得 $A(x^*, x^*) = x^*$ 成立。

3 例子

例1 考虑下面边值问题

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = u^{-a}(t) + \mu u^{b}(t), 0 < t < 1, \quad u(0) = u(1) = u'(0) = 0 \tag{17}$$

式(17)中 $0 < a, b < \frac{1}{2}$, $\mu \geqslant 0$。

令 $\eta = \max\{a, b\} < \frac{1}{2}$, $q(t) = 1$, $g(x) = \mu x^{b}$, $h(x) = x^{-a}$。

于是,对于 $\forall t \in (0,1)$ 以及 $\forall x > 0$,因为 $\eta < \frac{1}{2}$, $2 < \alpha \leqslant 3$,所以有 $\eta(\alpha - 1) < 1$, $\eta < 1$,所以 $\int_0^1 s^{-\eta(\alpha-1)}(1 - s)^{-\eta} ds < +\infty$,且有 $g(tx) = t^{b} g(x) \geqslant t^{\eta} g(x)$, $h(t^{-1}x) = t^{a} h(x) \geqslant t^{\eta} h(x)$,所以定理1的所有条件都满足。由定理1,我们可知式(17)有唯一正解 $x^*(t)$。

参 考 文 献

1 Podlubny I. Fractional differential equations. Mathematics in Science and Engineering, Vol, 198, Academic Press, New Tork/Londin/Toronto, 1999

2 Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional integrals and derivatives (Theorey and Applications). Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993

3 Kilbas A A, Trujillo J J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems II. Appl Anal, 2002, 81:435—493

4 El-Sayed A M A. Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders. Nonlinear Anal, 1998; 33:181—186

5 Kilbas A A, Trujillo J J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems I. Appl Anal, 2001; 78:153—192

6 Delbosco D, Rodino L. Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. J Math Anal Appl, 1996; 204:609—625

7 苏新卫, 穆晓霞. 非线性分数阶微分方程系统正解的存在性和唯一性. 河南师范大学学报(自然科学版), 2006; 34:9—12

8 Yuan Chengjun, Jiang Daqing. Multiplicity and uniqueness of positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation.

9 Bai Zhanbing, Lü Haishen. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. J Math Anal Appl, 2005; 311:495—505

10 Chu Jifeng, O'Regan Donal. Singular integral equations of Hammerstein type and applications to nonlinear conjugate problems. Taiwanese Journal of Mathematics. to appear.

11 Delbosco D. Fractional calculus and function spaces. J Fract Calc, 1996; 6:45—53

Unique Solution for the Singular Boundary Value Problem of A Nonlinear Fractional Differential Equation

YU Yao

(Dalian Education University, Dalian 116021, P. R. China)

[**Abstract**] Green's function and its properties for the nonlinear fractional differential equation boundary value problem $D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0, 0<t<1; u(0)=u(1)=u'(0)=0$, is considered where $2<\alpha\leqslant 3$ is a real number, andD_{0+}^{α} is the standard Riemann-Liouville differentiation. As an application of Green's function and its properties, uniqueness of solution is given for the singular boundary value problem by means of a fixed-point theorem on cones and a mixed monotone method. One concrete example is respectively given to explain the above theorem finally.

[**Key words**] fractional differential equation　　singular boundary-value problem　　unique solution　　fractional Green's function　　fixed-point theorem