

## 数 学

# 一种有向图最长路的算法、灵敏度分析及其应用

屈芝莲

(宝鸡职业技术学院基础部, 宝鸡 721013)

**摘要** 给出了一种有向图的定义。得到了这种有向图从始点到其它任一顶点之间最长路的算法。在不影响整个最长路的条件下, 通过边上机动资源变化的分析, 给出了这种有向图灵敏度分析的方法。解决了这种有向图在应用过程中的优化分析问题。

**关键词** 有向图最长路 网络图 CPM 优化法 灵敏度分析

**中国分类号** O157.5; **文献标志码** A

数学中的图表语言比文字语言和一般符号语言更具直观性, 容易形成表象, 给人一种结构感。本文所讨论的有向图是一种简单有向图。这种简单有向图在大型工程项目的计划等领域具有重要作用<sup>[1,2]</sup>。

## 1 相关概念

**定义1:** 有向图的始点(或源头)和终点(或黑洞), 对于有向图  $G = (V, E)$  的顶点  $v_k$  只存在  $(v_k, v_j)$  边而不存在  $(v_i, v_k)$  边, 则  $v_k$  称为始点或源头。如果对于  $v_k$  只存在  $(v_i, v_k)$  边而不存在  $(v_k, v_j)$  边, 则  $v_k$  称为终点或黑洞。从图上表示来说, 只有射出线而无射入线的顶点称为源头, 如图 1 中的顶点 1 和顶点 5, 而将只有射入线, 无射出线的顶点称为黑洞, 如图 1 中的顶点 4 和顶点 9。

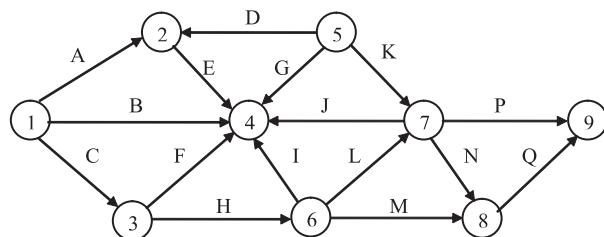


图 1 有两个以上源头和黑洞的有向图

**定义2:** 路和最长路<sup>[3]</sup>, 由始点  $v_k$  开始到达顶点  $v_j$  所经过的所有边, 构成了  $v_k$  到  $v_j$  的一条路。在  $v_k$  到  $v_j$  的多条路中, 边权之和最长的路为最长路。

**定义3:** 简单有向图<sup>[4]</sup>, 设顶点的非空集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边的集合  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 其边  $e_k(v_i, v_j)$  对应的权  $T = T(i, j)$ , 且满足以下条件的连通有向图称之为简单有向图  $G(V, E, T)$ :

- (1) 只存在  $(v_i, v_j)$  ( $i \neq j$ ) 的  $e_k$  边, 不存在  $(v_j, v_i)$  边, 且  $e_k$  是唯一的;
- (2) 有向图  $G(V, E, T)$  只有一个始点和一个终点。

## 2 最长路的计算

$v_1$  到  $v_n$  顶点之间的最长路算法如下:

(1) 为所有顶点编号。始点编号为 1, 终点编号为  $n$ , 对任一个边  $(v_i, v_j)$  来说, 应使  $i < j$ 。其编号方法可为取掉已经编号的顶点 1 射出的所有线, 再找始点, 如果始点只有一个则编号为 1(已编顶点号) + 1, 如果有多个, 则分别编号为  $1 + 1, 1 + 2, \dots$ , 依此类推直到所有顶点编号。

(2) 计算由顶点  $v_1$  到  $v_n$  的最长路的权值  $Te(n)$ 。

**定理 1:** 如果  $v_1$  到  $v_k$  顶点之间的最长路径为  $L$ , 那么从  $v_1$  到  $v_n$  经过  $v_k$  顶点之间的最长路径必然经过  $L$ (证明从略)。

**引理 1:** 最长路上的任意两顶点之间的最长路仍在此路上。

为计算  $v_1$  到  $v_n$  顶点的最长路, 可计算  $v_1$  到其它各顶点的最长路。其数学模型可描述为:

$$\begin{cases} Te(1) = 0; \\ Te(j) = \max\{Te(i) + T(i,j) \mid i = 1, 2, \dots, n\}. \end{cases}$$

$Te(n)$  即为整个有向图的最长路的权值。

(3) 寻找  $v_1$  到  $v_n$  的最长路。

**定义 3:** 边的总机动资源  $R(i,j)$ 。在不影响整个有向图最长路的条件下, 边上权数可增加的最大值称为这个边的总机动资源。

**定理 2:** 在最长路上, 各边的总机动资源均为零(证明从略)。

为寻找  $v_1$  到  $v_n$  的最长路, 首先计算各条边上总机动资源。根据总机动资源的定义, 计算边的总机动资源  $R(i,j)$  其数学模型可描述为:

$$\begin{cases} Tl(n) = Te(n); \\ Tl(j) = Tl(j) - T(i,j) \quad (j = n, n-1, \dots, 1); \\ R(i,j) = Tl(j) - Te(i) - T(i,j). \end{cases}$$

由总机动资源为零的边构成的路为此有向图的最长路。

## 3 灵敏度分析

灵敏度分析是指通过对有向图中各边权值的变化, 分析对已有有向图最长路的影响。

根据以上计算得知, 最长路上总机动资源均为零, 这说明在最长路上各边权值的变化会直接影响最长路。

(1) 在最长路上, 任一边的权值增加  $\Delta t$ , 从始点到终点的最长路的值就会增加  $\Delta t$ , 但整个有向图的最长路不会发生变化。

在最长路上, 任一边的权值减少量  $\Delta t$ , 可能会使整个有向图的最长路发生变化:

在最长路上, 当其任一边的权值减少的数小于非最长路上, 非零的  $\min\{R(i,j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$  时, 最长路不受影响, 从始点到终点的最长路的权值就会减少  $\Delta t$ ; 而当其任一边的权值减少的数等于非最长路上, 非零的  $\min\{R(i,j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$  时, 最长路的权值不发生变化, 但整个有向图的最长路将会增加; 当其任一边的权值减少的数大于非最长路上, 非零的  $\min\{R(i,j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$  时, 此时的最长路将不再是原有向图的最长路, 整个有向图的最长路需要重新计算来确定。

(2) 在非最长路上, 任一边的权值减少, 都不会影响整个有向图的最长路。

而如果任一边的权值增加  $\Delta t$  可能会影响整个有向图的最长路:

当权值的增加数  $\Delta t$  小于该边的总机动资源  $R(i,j)$ , 最长路不受影响; 当权值的增加数  $\Delta t$  等于该边的总机动资源  $R(i,j)$ , 整个有向图的最长路的权值不变, 而沿权值增加的边也会成为整个有向图中最长路; 当权值的增加数  $\Delta t$  大于该边的总机动资源  $R(i,j)$ , 则整个有向图中最长路将发生转移, 最长路将经过此边, 整个有向图的最长路权值将增加  $\Delta t - R(i,j)$ 。

## 4 应用举例

完成某工程项目需要经过  $A, B, \dots, Q$  的作业,

各作业之间的先后关系及完成各作业所需要消耗的时间(天)如图2所示。

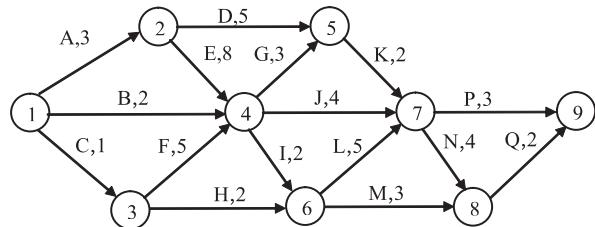


图2 某工程项目网络计划图

其中有向图中的边表示作业,其权为完成作业所消耗的时间资源,顶点为连接上一作业结束,下一作业开始的连接点。各边的总机动资源即为各作业的总机动时间(称为作业时差),工程项目的最短生产周期即为此有向图的最长路的权值。

#### 4.1 计算最长路(工程项目的最短生产周期)

为计算和表示方便,用□表示 $Te(i)$ ,用△表示 $Tl(j)$ ,顶点的 $Te(i)$ 可以表示该顶点下一所有作业的最早开始作业时间,顶点的 $Tl(j)$ 可以表示该顶点之前的所有作业最迟的结束时间。其计算结果如图3所示。

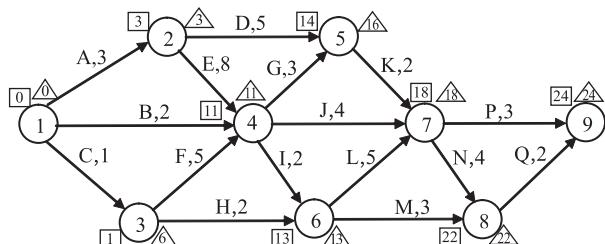


图3 网络计划图的计算

#### 4.2 寻找最长路(工程项目的关键词或作业)

其各边的总机动资源 $R(i,j)$ (作业时差),计算见表1所示。

由图3中计算得知,此工程项目最短生产周期为24 d,其中加粗边为最长路,即为此工程项目的关键词(即 $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow Q$ 作业是此工程项目的关键词),在此关键路线上各作业工期将影响整个工程项目的完成周期。

表1 作业时差计算表

作业名称 ( $i,j$ )	$T(i,j)$	$ES$	$EF$	$LS$	$LF$	$R(i,j)$	$CP$
A(1,2)	3	0	3	0	3	0	✓
C(1,3)	1	0	1	5	6	5	
B(1,4)	2	0	2	9	11	9	
E(2,4)	8	3	11	3	11	0	✓
D(2,5)	5	3	8	11	16	8	
F(3,4)	5	1	6	6	11	5	
H(3,6)	2	1	3	11	13	10	
G(4,5)	3	11	14	13	16	2	
I(4,6)	2	11	13	11	13	0	✓
J(4,7)	4	11	15	14	18	3	
K(5,7)	2	14	16	16	18	2	
L(6,7)	5	13	18	13	18	0	✓
M(6,8)	3	13	16	19	22	6	
N(7,8)	4	18	22	18	22	0	✓
P(7,9)	3	18	21	21	24	3	
Q(8,9)	2	22	24	22	24	0	✓

说明:

$ES$  表示本作业最早开始时间, $EF$  表示本作业最早完工时间;  
 $LS$  表示本作业最迟开始时间, $LF$  表示本作业最迟完工时间;  
 $CP$  为作业机动时间为 0 的作业。

其中: $EF(i,j) = ES(i,j) + T(i,j)$     $LS(i,j) = LF(i,j) - T(i,j)$ 。

#### 4.3 敏感度分析(网络图的优化)

在工程项目的关键词(有向图的最长路)上,任一作业时间延长都将会使整个工期延长;而任一作业时间如果缩短 1 天,都会使整个工期缩短 1 天;如果任一作业缩短 2 天(即 $\Delta t = \min\{R(i,j) | i, j = 1, 2, \dots\}$ ),整个工期也将缩短 2 天,但关键词将会增加,总机动资源(作业总时差)为 2 的作业 G 和 K 也将成为关键词,这些关键词工期的延误,将会影响整个工期的完成;而如果任一作业的工期在非关键词路上,任一作业工期的缩短,都不会影响整个工期的完成,如果任一作业工期延误天数超过其作业总时差,整个工期将超过 24 天。

## 参 考 文 献

- 1 韩伯棠.管理运筹学.北京:高等教育出版社,2005  
 2 马术文,陈永,杜全兴.有向图理论在工序排序决策中的应用.  
 西南交通大学学报(中文自然科学版),2005;(5):68—71

- 3 谭明术,任开远.有向图的最长圈.西南民族学院学报,2000;(3):12—15  
 4 宋增民.有向图中最长路或圈.东南大学学报(自然科学版),1987;(4):137—141

## Longest Path in a Digraph the Algorithm, Sensitivity Analysis and its Application

QÜ Zhi-lian

(Department of basis, Baoji Vocational and Technical College, Baoji 721013, P. R. China)

**[Abstract]** The definition of a digraph is Given, Directed graph is obtained from this starting point to the other longest path between any vertex of the algorithm. Without prejudice to the conditions of the longest path, through the analysis of changes in the edge of mobile resources, a directed graph of this sensitivity analysis method to solve this kind of directed graphs in the application process optimization analysis problems is given.

**[Key words]** longest path digraphs      network map      CPM      optimization      sensitivity analysis

(上接第 3728 页)

## The Design Methods Research of Helicopter Flight Quality Based on Dynamic Inversion

CAO Jia-min, GAO Hua

(Chinese Flight Test Establishment, Xian 710089, P. R. China)

**[Abstract]** Helicopter inherent characteristics make its flight poorer quality, and helicopters use task is asking that it has good flying qualities. This paper adopts dynamic inversion and poles configuration design method of combining the helicopter flying control law, and through the simulation method for inspection, confirmed the sample helicopter flight quality improvement and used the robustness of flight control, which shows that the control law is effective.

**[Key words]** helicopter      flight quality      flight control      dynamic inversion      robustness