第 11 卷 第 16 期 2011 年 6 月
1671—1815(2011)16-3858-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 11 No. 16 June 2011

极值理论下的香港汇丰控股 VaR 实证分析

王晓辉 庄亮亮
(华南理工大学理学院,广州 510641)

摘 要 极值理论可以更精确地处理金融数据的厚尾特性。选取香港上市的汇丰控股数据,运用 POT 方法做实证分析,对时间序列取门限值(Threshold),对超过门限的样本数据建模,极限点渐进分布服从 GPD 分布,估计模型参数,检验模型的合理性,并给出置信度为 95% 下的 VaR。

关键词 GPD 分布 阈值模型 POT 模型 门限 泊松过程
中图法分类号 F830.9; **文献标志码** A

20 世纪 30 年代,Dodd, Frechet, Fisher 和 Tippett[1] 开始对极值理论进行研究。Fisher 和 Tippett 证明了极值分部的三大型定理,为极值理论的发展研究奠定了基石。随后, Guedenko 给出了三大类型定理的严格证明及三大极限分部存在的充要条件。Gumbel 的著作反应了极值概率模型的统计应用成果,通过研究样本次序统计量的最大、最小值的极限渐近分布,可以更好地描述数据分部的尾部特征。随后,极值理论 EVT(Extreme Value Theory),被引入金融领域,目前,将极值理论应用于 VaR 的计算已成为金融机构的主流方法。

本文选取香港上市的汇丰控股数据,采用 POT 方法做实证分析,对序列取门限值(Threshold),对超过门限的样本数据进行建模,极限点渐进分布服从 GPD 分布。

1 在险价值(VaR)[2]

假设在时间指标 t,我们感兴趣的是接下来的 l 段中一个金融头寸的风险,令 $\Delta V(l)$ 表示金融头寸中,从时刻 t 到 $t+l$ 资产价值的变化,这是一个随机变量,用 $F_l(x)$ 表示 $\Delta V(l)$ 的积累分布函数(CDF),定义一个多头头寸在持有期 l 中的概率为 p 的 VaR 为:

$$p = p_r(\Delta V(l) \leqslant \mathrm{VaR}) = F_l(\mathrm{VaR}) \tag{1}$$

对于任意一元的 $F_l(x)$ 与概率 p,满足 $0<p<1$,称 $x_p = \inf\{x \mid F_l(x) \geqslant p\}$ 为 $F_l(x)$ 的 p 分位数,VaR 就是它的 p 分位数。

2 极值理论简介[3]

2.1 Fisher-Tippett 理论

Fisher-Tippett 理论是极值理论的核心,它给出了样本最大值的渐近分布。令 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 是一列独立同分布的随机变量,$x_{(n)} = \max(x_1, x_2 \cdots x_n)$,寻找两个序列 $\{\beta_n\}$,$\{\alpha_n\}$,满足 $x_{(n)}^* = (x_{(n)} - \beta_n)/\alpha_n$ 的分布当 n 趋于无穷时收敛到一个非退化分布。则 $x_{(n)}^*$ 的极限分部为:

$$H(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(1+\xi\dfrac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & \xi \neq 0; \\ \exp\{-e^{-x/\beta}\}, & \xi = 0。 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\beta > 0$, $1+\xi x > 0$, ξ 称为形状参数。当 $\xi > 0$ 时,即为 Frechet 分布,它具有厚尾性。当 $\xi < 0$ 时,即为 Weibull 分布;当 $\xi = 0$ 时,为 Gumbel 分布。Fisher-Tippett 理论表明,无论样本服从的分布如何,其最大值的渐近分布必属以上三种之一。

2.2. 广义 Pareto 分布

给定一个高门限 μ,讨论超越量 $x-\mu$ 的分布,记为:

2011 年 2 月 11 日收到
第一作者简介:王晓辉,女,硕士研究生,研究方向:金融工程。

$$F_{\mu}(y)=p_r(X-\mu\leqslant y\mid X>\mu)=\frac{F(y+\mu)-F(\mu)}{1-F(\mu)} \tag{3}$$

利用式(2),可以得到式(3)的渐近分布,称为广义 Pareto 分布(GPD),当门限取足够大时,$F_{\mu}(y)$趋近于 GPD,如下:

$$G(x)=\begin{cases}1-\left(1+\xi\dfrac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, & \xi\neq 0\\ 1-e^{-x/\beta}, & \xi=0\end{cases} \tag{4}$$

式(4)中,ξ 为形状参数。

3　基于极值理论的 POT 方法[4]

3.1　POT 方法参数估计和分位数确定

由式(3),可得:

$$F(x)=[1-F(\mu)]F_{\mu}(y)+F(\mu) \tag{5}$$

当 $X>\mu$ 时,可以记为 $x=y+\mu$,式(5)即:

$$F(x)=[1-F(\mu)]G_{\xi,\beta,\mu}(x-\mu)+F(\mu) \tag{6}$$

对于门限 μ,没有超过 μ 的概率分布可以用样本经验分本来拟合,$F(\hat{\mu})=\frac{n-N_{\mu}}{n}$,其中 N_{μ} 表示样本中超过门限 μ 的数目,n 表示样本容量。$\frac{N_{\mu}}{n}$表示超越率。代入式(6),可得

$$F(\hat{x})=1-\frac{N_{\mu}}{n}\left(1+\hat{\xi}\frac{x-\mu}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}} \tag{7}$$

参数 ξ,β 可以通过最大化这个似然函数的对数求得。

给定概率 $q>F(q)$,尾端分位数 $x_{\hat{q}}$ 可被估计为:

$$x_{\hat{q}}=\mu+\frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left\{\left[\frac{n}{N_{\mu}}(1-q)\right]^{-\hat{\xi}}-1\right\} \tag{8}$$

这即为 VaR。

4　基于极值理论 POT 方法的实证分析[5]

4.1　数据平稳化处理

选取汇丰控股 2008 年 12 月 03 日至 2010 年 02 月 22 日的日交易收盘价,用 $\ln P_{i+1}-\ln P_i$ 表示对数收益率,P_i,P_{i+1}分别表示 t 交易日和 t+1 交易日的收盘价,将这些数据扩大 100 倍,即变换成$(\ln P_{i+1}-\ln P_i)\times 100$,完成数据平稳化处理。

4.2　门限(阈)选取及参数确定

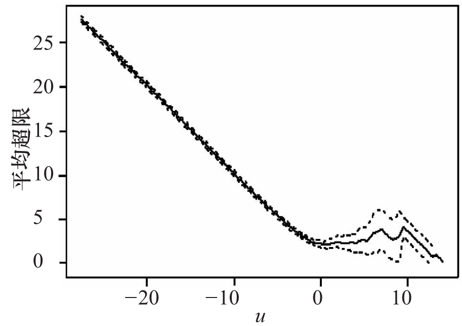

图 1　平均超限图

从平均超限图中可以看到,在阈值 $u>3.5$ 的一个范围内是近似线性的,所以选取 3.5 为阈值。同时根据 Loretan 和 Philips[6](1994)的建议,超限点的数目一般不要超过样本长度的 10%。以 3.5 作为阈值,有 30 个数据超过该阈值,本数据样本数为 300,刚好达到 10%。

在 $u=-1$ 到 $u=6$ 之间均匀地选取 100 个值分别作为阈值,用 GPD 估计得到 100 组参数值($\hat{\sigma}$,$\hat{\zeta}$),结果如图 2 所示。可以看到选取 $u=3.5$ 作为阈值是合理的。

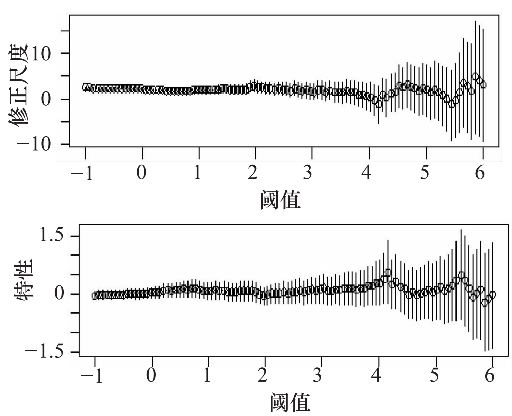

图 2　阈值选取

图 2 在不同阈值下,GPD 模型参数(σ,ζ)的极大似然估计及相应的 95% 置信区间如下:

σ 的极大似然估计为 1.97,95% 置信区间 =

[0.866 677 3,3.082 366]。

ζ 的极大似然估计为 0.14,置信区间 = [−0.291 027 6,0.579 439 4]。

利用估计结果,我们可以进一步作出广义 Pareto 分布的诊断图。

4.3 模型检验

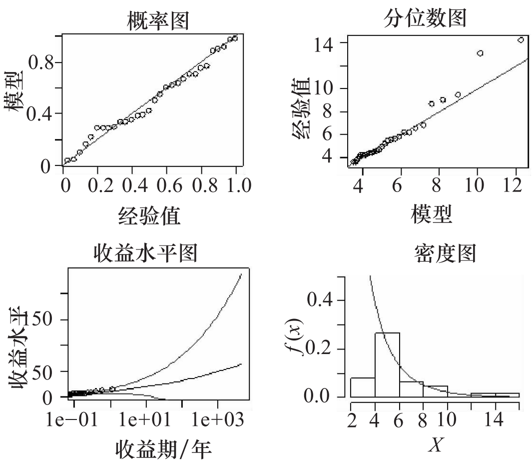

图 3 模型检验

从图 3 的结果可以看出利用 GPD 模型拟合这组汇丰控股数据的尾部基本上是合适的。上图的重现水平图就是不同置信度(通过适当的变换)的 VaR。重现水平的置信区间说明数据与模型的偏离不大,因为经验重现水平在估计的重现水平的 95% 置信区间内。

在 $\alpha = 0.05$ 时,VaR 的估计值为 12.08。

5 小结

以极值理论为基础的 POT 方法可以准确描述金融时间序列的尾部特征,避免了整体拟合失真而导致对风险值的过高或过低估计现象,同时,很好地处理了时间序列的厚尾性。

参 考 文 献

1 朱庆国,张 维,长小薇,等. 极值理论应用研究进展评析. 系统工程学报,2001;16(1):72—77

2 Tsay R S. 金融时间序列分析. 北京:机械工业出版社,2006;4:201—203

3 Gencay R, Selcuk F. EVIM:a software package for extreme value analysis in MATLAB. Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 2001;5(3):213—239

4 Coles S. 极值统计建模导论. 世界图书出版社. 2008;1:20—93

5 薛 毅,陈立萍. 统计建模与 R 软件. 清华大学出版社. 2007:20—90

6 Loretan M, Phillips P C B. Testing the covariance stationarity of heavy-tail time series:an overview of the theory with applications to several financial datasets. Journal of Empirical Finance, 1994;1(2):211—248

VaR Analysis of HSBC Holdings in Hong Kong Based on Extreme Value Theory

WANG Xiao-hui, ZHUANG Liang-liang

(College of Science , South China University of Technology, Guangzhou 510641,P. R. China)

[**Abstract**] Extreme value theory can describe the heavy tail characteristics of finance data more exactly. HSBC Holdings in Hong Kong as an example are took, gaven the data analysis by the method of POT as follows: chose the threshold of the data series, modelinged the sample data excess the threshold whose limit converges to the distribution of GPD, estimated parameters, test the reasonability and gave the VAR under 95% confidence level.

[**Key words**] GPD distribution peaks ouer threshold POT model threshold poisson process