第 11 卷　第 18 期　2011 年 6 月
1671—1815(2011)18-4300-03
科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering
Vol. 11　No. 18　June 2011
© 2011　Sci. Tech. Engng.

一类包含 $S(n)$ 和 Euler 函数的方程

陈　斌
(渭南师范学院数学与信息科学系,渭南 714000)

摘　要　对于任意正整数 n,设 $\varphi(n)$ 和 $s(n)$ 分别是关于 n 的 Euler 函数和 Smarandache 函数。利用初等方法,得到了方程 $\varphi(n)=s(n^k)$ 当 $k=7$ 时的所有正整数解。

关键词　Smarandache 函数　Euler 函数　方程的解
中图法分类号　O156.4;　**文献标志码**　A

对于任意正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小正整数 m 使得 $n\mid m!$,即就是 $S(n)=\min\{m:m\in N,n\mid m!\}$,它的各种性质是数论及其应用领域中一个十分引人关注的研究课题[1]。对于正整数 n,设 $\varphi(n)$ 是 n 的 Euler 函数,这里的 $\varphi(n)$ 表示不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数[2]。关于包含 Euler 和 Smarandache 函数的方程

$$\varphi(n)=S(n^k)\qquad(*)$$

的解,很多学者都进行了研究,得到了一些较好的结果[3—6]。利用初等的方法解决了方程(*)在 $k=7$ 时的求解问题,即证明了以下定理。

定理 1　当 $k=7$ 时,方程(*)仅有解 $n=1,80$。

1　若干引理

引理 1[2]　Euler 函数为积性函数,即有对于任意互素的正整数 m 和 n,则有 $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。

引理 2[2]　如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则有

$$\varphi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)。$$

引理 3　当 $n>2$ 时,则必有 $2\mid\varphi(n)$。

证明　(1) 若正整数 n 有奇素因子,不妨设为 p,则 $p>2$ 且 $2\mid p-1$。又有引理 2 可得出 $p-1\mid\varphi(n)$,所以易知 $2\mid\varphi(n)$。

(2) 若正整数 n 没有奇素因子,当 $n>2$ 时,必有 $n=2^k$,k 是大于 1 的正整数,由 Euler 函数的性质易得 $\varphi(n)=2^{k-1}(2-1)=2^{k-1}$,所以也有 $2\mid\varphi(n)$。

故由(1)和(2)可知,命题成立。

引理 4[7]　如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则

$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}$。

引理 5[7]　对于素数 p 和正整数 k,有 $S(p^k)\leqslant kp$,特别地,当 $k<p$ 时,有 $S(p^k)=kp$。

引理 6　设 $y=p^{\alpha-2}(p-1)-\alpha p$,$p$ 为素数,则当 $\alpha>3$ 时,函数 y 是单调递增的。

证明　因为 $y'=(p-1)(\alpha-2)p^{\alpha-3}-p$,当 $\alpha>3$ 时,易知 $y'>0$,故结论成立。

2　定理的证明

把 $k=7$ 代入方程(*)可得,

$$\varphi(n)=S(n^7)。\qquad(1)$$

显然当 $n=1$ 是式(1)的解。以下主要讨论 $n>1$ 时的情况。

设 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是正整数 n 的标准分解式,则由引理 4 有

$$S(n^7)=\max\{S(p_1^{7\alpha_1}),S(p_2^{7\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{7\alpha_k})\}=S(p^{7r})\qquad(2)$$

2011 年 1 月 4 日收到　国家自然科学基金项目(11071194)、陕西省教育厅科研计划项目资助(2010JK538)、陕西省科技厅自然科学基金项目(2010JM1009)、基础数学省重点扶持学科资助

作者简介:陈　斌,男(1979—)陕西咸阳人,硕士,渭南师范学院讲师,研究方向:数论研究。E-mail:ccbb3344@163.com。

由引理 1 可知,

$$\varphi(n)=\varphi(p^r)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right) \quad (3)$$

联立式(1)~式(3)可得,

$$p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=S(p^{7r})。 \quad (4)$$

① $r=1$ 时 若 $p=2$,由(4)可知

$S(2^7)=8=\varphi\left(\frac{n}{2}\right)$,即 $n=32$,

而 $\varphi(32)=2^5-2^4=16\neq S(32^7)$,故 $n=32$ 不是式(1)的解。

若 $p=3$,则 $S(3^7)=18=2\varphi\left(\frac{n}{3}\right)$,这与引理 3 矛盾,所以式(1)无解。

同理可得,若 $p=5,7,11$ 时,式(1)无解。

若 $p>11$,则 $S(p^7)=7p=(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p}\right)$,且 $2\mid p-1$,这与引理 3 矛盾,所以式(1)无解。

② $r=2$ 时 若 $p=2$,由(4)可知 $S(2^{14})=16=2\varphi\left(\frac{n}{4}\right)$,即 $\varphi\left(\frac{n}{4}\right)=8$,则 $n=64$,而 $S(64^7)=S(2^{42})=46\neq 32=2^6-2^5=\varphi(64)$,所以 $n=64$ 不是式(1)的解。

若 $p=3$,则 $S(3^{14})=30=6\varphi\left(\frac{n}{9}\right)$,这与引理 3 矛盾,所以式(1)无解。

若 $p=5,7,11,13$,同理可证,式(1)无解。

若 $p\geqslant 17$,$S(p^{14})=14p=p(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^2}\right)$,即有 $7=\frac{p-1}{2}\varphi\left(\frac{n}{p^2}\right)$,这与引理 3 矛盾,式(1)无解。

③ $r=3$ 时 若 $p=2$,$S(2^{21})=24=2^2\varphi\left(\frac{n}{8}\right)$,则 $\frac{n}{8}=9$,所以,$n=72$,而 $\varphi(72)=(2^3-2^2)(3^2-3)=24$,$S(72^7)=S(2^{21}\cdot 3^{14})=30\neq 24=\varphi(72)$,故 $n=72$ 不是式(1)的解。

若 $p=3$,$S(3^{21})=45=18\varphi\left(\frac{n}{27}\right)$,这与引理 3 矛盾,式(1)无解。

若 $p=5,7,11,13,17,19$,同理可证式(1)无解。

若 $p\geqslant 23$,由引理 5 有,

$S(p^{21})=21p=p^2(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^3}\right)$,即 $21=p(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^3}\right)$,这与 $p\geqslant 23$ 矛盾,故式(1)无解。

④ $r=4$ 时 若 $p=2$,$S(2^{28})=32=2^3\varphi\left(\frac{n}{16}\right)$,即 $\varphi\left(\frac{n}{16}\right)=4$,所以 $n=80$,而 $\varphi(80)=(2^4-2^3)(5-1)=32$,$S(80^7)=S(2^{28}\cdot 5^7)=32=\varphi(80)$,故 $n=80$ 是式(1)的解。

若 $p=3$,$S(3^{28})=60=3^3\cdot 2\varphi\left(\frac{n}{81}\right)$,这与引理 3 矛盾,式(1)无解。

若 $p\geqslant 5$,由引理 5 有,$28p\geqslant S(p^{28})=p^3(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^4}\right)$,即 $28\geqslant p^2(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^4}\right)$,

这与 $p\geqslant 5$ 矛盾,故式(1)无解。

⑤ $r=5$ 时 若 $p=2$,$S(2^{35})=42=2^4\varphi\left(\frac{n}{32}\right)$,这与引理 3 矛盾,式(1)无解。

若 $p\geqslant 3$,$35p\geqslant S(p^{35})=p^4(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^5}\right)$,即$45\geqslant p^3(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^5}\right)$,这与 $p\geqslant 3$ 矛盾,故式(1)无解。

⑥ $r\geqslant 6$ 时 若 $p=2$,$S(2^{7r})=2^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{2^r}\right)$,即要 $2^{r-1}\mid S(p^{7r})$,由 Smarandache 函数的定义和引理 4、5 可知,这不可能成立,所以式(1)无解。

若 $p\geqslant 3$,$7rp\geqslant S(p^{7r})=p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)$,即 $7r\geqslant p^{r-2}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)\geqslant p^{r-2}(p-1)$,由引理 6 可知,不可能成立,所以式(1)无解。

综上所述可得:当 $k=7$ 时,方程($*$)仅有解 $n=1,80$。

参 考 文 献

1　Smarandache F. Only problems, not solutions, Chicago, Xiquan Publ. House, 1993

(下转第 4312 页)

的,且此曲线就是初始序列所在的直线。这个定理是对文献[2]中定理 4.3 的推广。它告诉我们,即使去掉细分权值对称这个限制,四点插值细分算法在一般情况下也不能收敛到一个二阶可导的函数。因此,结合文献[2]中的结果,我们知道无论权值对称或不对称,四点插值细分算法的极限曲线能达到的光滑度是一样的。

参 考 文 献

1 Dubuc S. Interpolation through an iterative scheme. Mathematical Analysis and Applications,1986;114(1):185—204

2 Dyn N, Levin D, Gregory J. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. Computer Aided Geometric Design,1987;4(4): 257—268

3 曹 沅. 四点插值细分算法极限曲线曲面 C^2 连续的充分必要条件. 计算机辅助设计与图形学学报,2003; 15(8): 961—966

4 Dyn N, Gregory J, Levin D. Analysis of uniform binary subdivision scheme for curve design. Constructive Approximation,1991;7(1): 127—147

5 Dyn N, Levin D. Subdivision schemes in geometric modelling. Acta Numerica,2002;11(1):73—144

6 蒋尔雄,高坤敏,吴景琨. 线性代数. 北京:人民教育出版社,1978

Smoothness of 4-Point Interpolatory Subdivision Schemes

SUO Yuan-yuan, OU Ying-hao, XIE Gang

(Department of Mathematics, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, P. R. China)

[**Abstract**] Dyn, Levin and Gregory's results on smoothness of 4-point interpolatory subdivision schemes from symmtric mask case to nonsymmetric mask case are generalized. For 4-point interpolatory subdivision schemes with nonsymmetric masks, sufficient conditions and necessary conditions for limit functions to be C^1 are given and also proved that limit functions are not twice differentiable in general.

[**Key words**] subdivision interpolatory smoothness eigenvalue generalized eigenvector

(上接第 4301 页)

2 张文鹏. 初等数论. 西安:陕西师范大学出版社,2007

3 Ma J P. An equation involving the Smarandache function, Scientia Magna,2005;1(2):89—90

4 Yi Y. An equation involving the Euler function and Smarandache function,2005;1(2):172—175

5 黄寿生,陈锡庚. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^5)$. 华南师范大学学报,2007;(4):41—43

6 郑 涛. 关于数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^t)$. 中国科教创新导刊,2009;(2):154—154

7 Mark Farris, Patrick Mitchell. Bounding the Smarandache function, Smarandache Notions J,2008,13:37—42

An Equation Involving $S(n)$ and Euler Function

CHEN Bin

(Department of Mathematics and Informational Science, Weinan Normal School, Weinan 714000, P. R. China)

[**Abstract**] For any positive integer n, let $\varphi(n)$ and $s(n)$ denote the Euler function and the Smarandache function of the integer n. The elementary number theory methods is used to get the solutions of the equation $\varphi(n)=s(n^k)$ if the $k=7$, and give its all positive integer solutions.

[**Key words**] Euler function Smarandache function the solutions of the equation