

分担数组与正规定则

刘素红¹ 田 保²

(宝鸡文理学院数学系,宝鸡 721013;铜陵市第一中学²,铜陵 244000)

摘要 研究全纯函数的正规性。利用分担数组;推广了已有的定理。设 F 为区域 D 内的一族全纯函数, b, c 为两个非零有穷复数, 若 $\forall f \in F, f$ 与 f', f'' 在 D 上分担数组 $(0, b, c)$, 则 F 在 D 内正规。

关键词 全纯函数 分担数组 正规定则

中图法分类号 O174.52; **文献标志码** A

定义 设 $f(z), g(z), h(z)$ 为非常数的全纯函数, a, b, c 为有穷复数, 若 $f-a, g-b, h-c$ 的零点相同(不计重数), 则称 f, g, h **IM 分担数组** (a, b, c) , 特别地, 当 $a=b=c$ 时, 则称 a 为 f, g, h 的 **IM 分担值**。

对函数正规性的研究前人已得很多重要的成果, 1992 年, Schwick W 率先开展了分担值与正规定则的研究, 他证明了:

定理 A^[1] 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数, a_1, a_2, a_3 为三个互相判别的有穷复数, 若 a_1, a_2, a_3 为 f 和 f' 在 D 中的 **IM 分担值**, 其中 f 为族 F 中的任意一个函数, 则 F 在 D 内正规。

方明亮从另外的角度对 Schwick 的结果加以推广得到:

定理 B^[2] 设 F 为定义在区域 D 内的一族亚纯函数, a_1, a_2, a_3 为三个互相判别的有穷复数, 如果对任意的 $f \in F$, 有 f 和 f' 分担集合 $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, 那么 F 在 D 内正规。

2000 年, 陈怀惠, 华欲厚得到了:

定理 C^[3] 设 F 为区域 D 内的一族全纯函数, a 为有穷非零复数, 若对任意的 $f \in F, a$ 为 f 与 f', f'' 在 D 上的 **IM 分担值**, 则 F 在 D 内正规。

2011 年 1 月 4 日收到, 1 月 20 日修改

宝鸡文理学院重点

科研项目 ZK10108 资助

第一作者简介: 刘素红 (1970—), 女, 陕西宝鸡人, 讲师, 硕士研究生, 研究方向: 复分析。E-mail: bjwlxysh@126.com。

林川伟推广上述结果得到:

定理 D^[4] 设 F 为区域 D 内的一族全纯函数, a, b, c 为三个非零有穷复数, 若 $\forall f \in F, f$ 与 f', f'' 在 D 上分担数组 (a, b, c) , 则 F 在内正规。

本文对定理 D 中的限制条件“ a 为非零有穷复数”进行修改, 当 $a=0$ 时定理也成立得:

定理 1 设 F 为区域 D 内的一族全纯函数, b, c 为两个非零有穷复数, 若 $\forall f \in F, f$ 与 f', f'' 在 D 上分担数组 $(0, b, c)$, 则 F 在 D 内正规。

1 主要引理

引理 1^[5] 设 F 为单位圆 Δ 上的全纯函数族, k 为一正整数, 若对任意 $f \in F, f$ 的零点重数至少为 k , 假设存在正数 A , 使得当 $f=0$ 时, 有 $|f^{(k)}(z)| \leq A$, 若 F 在 D 上不正规, 则对于 $0 \leq \alpha \leq k$, 存在

- (1) 实数 $r, r \in (0, 1)$;
- (2) 一个点列 $z_n, |z_n| < r$;
- (3) 一个函数列 $f_n, f_n \in F$;
- (4) 正数列 $\rho_n, \rho_n \rightarrow 0$ 。

使得 $g_n(\xi) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面 C 上按照球面距离内闭一致收敛于非常数全纯函数 $g(\xi)$, $g(\xi)$ 的级至多为 1 且还满足 $g^*(\xi) \leq g^*(0) = kA + 1$ 。

引理 2^[6] $f(z)$ 为有穷级全纯函数, a, b 为两个非零有穷复数, $f(z)$ 满足(1)当 $f(z)=0$ 时, $f'(z)=a$, (2)当 $f'(z)=a$ 时, $f''(z)=0$, 则 $f(z)=a(z-b)$ 。

3 定理的证明

假设 F 在 D 内不正规,由引理 1 知,存在

- (1) 实数 $r, r \in (0, 1)$;
- (2) 一个点列 $z_n, |z_n| < r$;
- (3) 一个函数列 $f_n, f_n \in F$;
- (4) 正数列 $\rho_n, \rho_n \rightarrow 0$.

使得 $g_n(\xi) = \rho_n^{-1} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面 C 上按照球面距离内闭一致收敛于非常数全纯函数 $g(\xi)$, $g(\xi)$ 的级至多为 1 且 $g^*(\xi) \leq g^*(0) = |b| + 2$ (因为当 $f(z) = 0$ 时, $f'(z) = b$, 所以这里 A 取 $|b| + 1$), 则 $g(\xi)$ 有以下两条性质:

- (1) 当 $g(z) = 0$ 时, $g'(z) = b$ 。

如果 $\exists \xi_0$, 使得 $g(\xi_0) = 0$, 由 Hurwitz 定理知则 $\exists \xi_0, \xi_n \rightarrow \xi_0$, 使得 $g_n(\xi_n) = \rho_n^{-1} f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 这样就有 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$ 。又已知 f 与 f', f'' 在 D 上分担数组 $(0, b, c)$, 所以有 $f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) = b, f''_n(z_n + \rho_n \xi_n) = c$

故 $g'_n(\xi_n) = f'_n(z_n + \rho_n \xi_n) = b$, 得到

$$g'(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(\xi_n) = b.$$

- (2) 当 $g'(z) = b$ 时, $g''(z) = 0$ 。

现假设 $g'(\eta_0) = b$, 由 Hurwitz 定理知,

$$\exists \eta_0, \eta_n \rightarrow \eta_0,$$

$$g'_n(\eta_n) = f'_n(z_n + \rho_n \eta_n) = b,$$

由定理条件知, $f''_n(z_n + \rho_n \xi_n) = c$ 。

$$g''(\eta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g''_n(\eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n f''_n(z_n + \rho_n \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n c = 0$$

再由引理 2 知 $g(\xi) = b(\xi - d)$, 这里 d 为任意非零有穷复数, 这样

$$g^*(0) = \frac{|g'(0)|}{1 + |g(0)|^2} \leq |g'(0)| = |b|, \text{ 这与}$$

$g^*(0) = |b| + 2$ 矛盾, 定理证毕。

从而得到定理 D 的推广为:

定理 2 设 F 为区域 D 内的一族全纯函数, b, c 为两个非零有穷复数, 若 $f \in F, f$ 与 f', f'' 在 D 上分担数组 (a, b, c) , 则 F 在内正规。

参 考 文 献

- 1 Schwick W. Sharing values and normality. Archiv der Mathematik, 1992;59:50—54
- 2 Fang M L. A note on sharing values and normality. Journal of Mathematical Study, 1996;29:29—32
- 3 Cheng H H, Hua X H. Normal families concerning sharing values. Israel J Math, 2000;115(2):355—362
- 4 林川伟. 涉及分担数组的唯一性与正规性. 数学理论与应用, 2001;21(2):10—16
- 5 Pang Xuecheng, Zalcman L. Normal families and shared values. Bull London Math Soc, 2000; 32(3):325—331
- 6 Pang Xuecheng, Zalcman L. Normal families and shared values. Bar-Ilan University present no. Biuncs 98/23, 1998

Sharing Array and Nomoility Criterion

LIU Su-hong¹, TIAN Bao²

(Department of math, Baoji University of Arts and Sciences¹, Baoji 721013, P. R. China;

No. 1 High School Tongling Anhui², Tongling 244000, P. R. China)

[Abstract] For studied the nomoility of holomorphic functions, used the sharing array, some results become more wide are made of. It is concluded that: set F on the regional D holomorphic functions tribe, b and c are two non-zero poor plural, if $\forall f \in F, f$ with f', f'' sharing array $(0, b, c)$ on D , then F is normal in the region D .

[Key words] holomorphic functions sharing array nomoility criterion