第 11 卷　第 8 期　2011 年 3 月
1671—1815(2011)8-1737-04

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 11　No. 8　Mar. 2011
© 2011　Sci. Tech. Engng.

离散 LPV 重复过程的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制

李艳辉　刘雅喆　姜寅令　黄　娜

（东北石油大学电气信息工程学院，大庆 163318）

摘　要　研究离散线性参数变化(LPV)重复过程的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器设计问题。通过引入一个附加矩阵解除了系统矩阵与依赖于参数的李雅普诺夫函数之间的耦合，从而提出依赖于参数的解耦的鲁棒 H_∞ 性能判据。进一步，根据参数线性矩阵不等式技术导出鲁棒 H_∞ 控制器存在的充分条件，通过利用近似基函数和网格技术把相应的控制器设计问题转换成求解一个有限维参数线性矩阵不等式的凸优化问题。

关键词　线性参数变化系统　　重复过程　　H_∞ 状态反馈控制器　　参数线性矩阵不等式　　参数依赖李雅普诺夫函数

中图法分类号　TP273.2　　TP13；　　**文献标志码**　A

线性参数变化(LPV)系统是一类重要的时变系统，其状态空间模型矩阵是某些时变参数的确定函数，而这些时变参数是可以实时测量的，许多实际系统都可用上述模型进行描述[1]。近年来，LPV 系统成为备受控制理论界关注的一个热点，其理论已经成功应用在机器人、汽车系统和航天等领域[2,3]。重复过程近年来也受到国内外学者的广泛关注，因为重复过程是一类具有重要的理论意义和实践应用的特殊的二维系统，例如在学习迭代控制，煤矿开采和金属锻造中都有重要应用[4]。值得注意的是，实际重复过程通常它的参数是时变的又实时可测的，这个系统就会自然地依赖于未知的但是可以实时测量的时变参数。因此，离散 LPV 重复过程成为更合理的描述来解释参数漂移现象并在工程应用方面具有很大的潜力。

本文主要贡献是针对离散 LPV 重复过程提出依赖于参数的解耦的鲁棒 H_∞ 性能判据，基于此判据和参数线性矩阵不等式技术给出该离散 LPV 重复过程鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件。该充分条件通过近似基函数和网格技术可以把控制器技术转换成一个有限维参数线性矩阵不等式的凸优化问题，很容易求解其数值解。该项研究具有重要的理论意义和潜在的工程实践意义。

1　问题描述

考虑如下的离散 LPV 重复过程

$$\begin{cases} x_{k+1}(\rho+1) = A(r(\rho))x_{k+1}(\rho) + B_0(r(\rho))y_k(\rho) + \\ \qquad B(r(\rho))u_{k+1}(\rho) + B_1(r(\rho))w_{k+1}(\rho) \\ y_{k+1}(\rho) = C(r(\rho))x_{k+1}(\rho) + D_0(r(\rho))y_k(\rho) + \\ \qquad D(r(\rho))u_{k+1}(\rho) + D_1(r(\rho))w_{k+1}(\rho) \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中：通道长度为 α，在第 k 个通道上，$x_{k+1}(\rho) \in R^n$ 为过程状态向量，$y_k(\rho) \in R^m$ 为通道剖面向量，$u_{k+1}(\rho) \in R^l$ 是控制输入向量，$z_{k+1}(\rho) \in R^p$ 是可测信号，$v_{k+1}(\rho) \in R^l$ 是控制输出向量，$w_{k+1}(\rho) \in R^q$ 是扰动输入，即 $w_{k+1}(\rho) \in L_2\{[0,\infty),[0,\infty)\}$。假定系统矩阵为时变参数 $r(\rho)$ 的函数。时变参数向量 $r(\rho) = [r_1(\rho) \quad r_2(\rho) \quad \cdots \quad r_s(\rho)]^{\mathrm{T}}$ 满足 $r_i(\rho)$ 实时可测且 $r_i(\rho) \in [\overline{r_i} \quad \overline{r_i}]$，以下用 r_ρ 代表 $r(p)$。

假定系统的状态是可以直接测量的，设计一个如下形式的依赖于参数的无记忆状态反馈控制器：

$$\mu_{k+1}(\rho) = [k_1(r_\rho) \quad k_2(r_\rho)] \begin{bmatrix} x_{k+1}(\rho) \\ y_k(\rho) \end{bmatrix} \tag{2}$$

2010 年 12 月 23 日收到

第一作者简介：李艳辉(1970—)，辽宁省法库县人，教授，博士后，研究方向：鲁棒控制，鲁棒滤波，模型降阶。

式(2)中 $k_1(r_\rho) \in R^{s\times n}$, $k_2(r_\rho) \in R^{s\times m}$ 为状态反馈控制器的增益,依赖于参数 γ_ρ。考虑方程式(1)和式(2)得到如下的闭环离散 LPV 重复过程为:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} x_{k+1}(\rho+1) \\ y_{k+1}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}(r_\rho) & \bar{B}_0(r_\rho) \\ \bar{C}(r_\rho) & \bar{D}_0(r_\rho) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{k+1}(\rho) \\ y_k(\rho) \end{bmatrix} + \\ \qquad \begin{bmatrix} \overline{B_1}(r_\rho) \\ \overline{D_1}(r_\rho) \end{bmatrix} w_{k+1}(\rho) \\ z_{k+1}(\rho) = [0 \quad I]\begin{bmatrix} x_{k+1}(\rho) \\ y_k(\rho) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3}$$

式(3)中:$\bar{A}(r_\rho) = A(r_\rho) + B(r_\rho)K_1(r_\rho)$, $\overline{B_1}(r_\rho) = B_1(r_\rho)$, $\bar{B}_0(r_\rho) = B_0(r_\rho) + B(r_\rho)K_2(r_\rho)$, $\overline{D_1}(r_\rho) = D_1(r_\rho)$, $\bar{C}(r_\rho) = C(r_\rho) + D(r_\rho)K_1(r_\rho)$, $\bar{D}_0(r_\rho) = D_0(r_\rho) + D(r_\rho)K_2(r_\rho)$。

离散 LPV 重复过程式(3)若满足闭环离散 LPV 重复是渐近稳定的且满足

$$\| z_{k+1}(\rho) \|_2 < \gamma \| w_{k+1}(\rho) \|_2 ,$$

则称闭环离散 LPV 重复过程式(3)具有 H_∞ 性能。

2 主要结果

定理 1 考虑闭环离散 LPV 重复过程式(3)且具有 H_∞ 扰动衰减水平 $\gamma > 0$ 的充分条件为存在参数矩阵 $P(\gamma_\rho) > 0$ 和对称正定矩阵 $Q > 0$,使得如下参数线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -P(r_\rho) & 0 & 0 & \bar{A}^{\mathrm{T}}(r_\rho)P(r_{\rho+1}) & C^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & -Q+I & 0 & \bar{B}_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)P(r_{\rho+1}) & D_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{B}_1^{\mathrm{T}}(r_\rho)P(r_{\rho+1}) & D_1^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & * & * & -P(r_{\rho+1}) & 0 \\ * & * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

注 1:在证明此定理中选取的 Lyapunov 函数是

$$V(k,\rho) = x_{k+1}^{\mathrm{T}}(\rho)P(r_\rho)x_{k+1}(\rho) + y_k^{\mathrm{T}}(\rho)Qy_k(\rho)。$$

式(4)中含有 Lyapunov 函数矩阵与系统矩阵变量的乘积项,因此可知式(4)实际为参数 r_ρ 的非线性矩阵不等式,为控制器的设计带来了困难。为了解决这个问题,通过引入附加矩阵来达到解耦的目的,从而得到易于计算解耦的 H_∞ 性能准则。

定理 2 如果存在对称正定矩阵 $P(r_\rho)$ 和 $Q > 0$,及一般矩阵 G 使闭环离散 LPV 重复过程式(3)渐近稳定且满足 H_∞ 扰动衰减水平 $\gamma > 0$,则有参数线性矩阵不等式(5)。

$$\begin{bmatrix} -P(r_\rho) & 0 & 0 & \bar{A}^{\mathrm{T}}(r_\rho)G & \bar{C}^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & -Q+I & 0 & \bar{B}_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)G & \bar{D}_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{B}_1^{\mathrm{T}}(r_\rho)G & \bar{D}_1^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & * & * & P(r_{\rho+1})-(G+G^{\mathrm{T}}) & 0 \\ * & * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

证明 为证明定理,我们只需证明式(4)与式(5)等价。如果式(4)成立,选择 $G = G^{\mathrm{T}} = P(r_{\rho+1})$,代入式(5)可得式(5),说明式(4)→式(5)。

另一方面,若式(5)成立,则有 $G + G^{\mathrm{T}} - P(r_{\rho+1}) > 0$,考虑到 $P(r_{\rho+1})$ 为对称正定矩阵,可推出 G 为可逆矩阵,且有不等式 $(G - P(r_{\rho+1}))^{\mathrm{T}}P^{-1}(r_{\rho+1})(G - P(r_{\rho+1})) > 0$ 成立,进而可得 $-G^{\mathrm{T}}P^{-1}(r_{\rho+1})G \leqslant P(r_{\rho+1}) - G - G^{\mathrm{T}}$。则由式(5)可推出

$$\begin{bmatrix} -P(r_\rho) & 0 & 0 & \bar{A}^{\mathrm{T}}(r_\rho)G & \bar{C}^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & -Q+I & 0 & \bar{B}_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)G & \bar{D}_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{B}_1^{\mathrm{T}}(r_\rho)G & \bar{D}_1^{\mathrm{T}}(r_\rho)Q \\ * & * & * & -G^{\mathrm{T}}P(r_{\rho+1})G & 0 \\ * & * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

用 $\mathrm{diag}\{I,I,I,G^{-1}P(r_{\rho+1}),I,I\}$ 对式(6)进行全等变换可得式(4),说明式(5)→式(4)定理得证。

注 2:定理 2 实现了解耦,基于定理 2 可以设计出鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器。

定理 3 考虑离散 LPV 重复过程式(1)。设 $\gamma > 0$ 为给定的标量,则存在形如式(2)的依赖于参数的无记忆状态反馈控制器,使得闭环离散 LPV 重复过程 $\bar{\Sigma}$ 沿通道渐近稳定且具有 H_∞ 性能水平 $\gamma > 0$ 的充分条件为存在矩阵变量 $X(\rho) \in R^{n\times n}$, $R(\rho) \in R^{m\times n}$, $V \in R^{n\times n}$ 使得

$$\begin{bmatrix} -X(r_\rho) & 0 & 0 & T_{14}(r_\rho) & T_{15}(r_\rho) \\ * & -Q+I & 0 & T_{24}(r_\rho) & T_{25}(r_\rho) \\ * & * & -\gamma^2 I & B_1^{\mathrm{T}}(r_\rho) & D_1^{\mathrm{T}}(r_\rho) \\ * & * & * & X(r_\rho)-V^{\mathrm{T}}-V & 0 \\ * & * & * & * & -H \end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

$$HQ=I \tag{8}$$

$T_{14}(r_\rho)=V^{\mathrm{T}}\bar{A}^{\mathrm{T}}(r_\rho)=V^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(r_\rho)+R^{\mathrm{T}}(r_\rho)B^{\mathrm{T}}(r_\rho)$,
$T_{15}(r_\rho)=V^{\mathrm{T}}\bar{C}^{\mathrm{T}}(r_\rho)=V^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(r_\rho)+R^{\mathrm{T}}(r_\rho)D^{\mathrm{T}}(r_\rho)$,
$T_{24}(r_\rho)=B_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)+K_2^{\mathrm{T}}(r_\rho)B^{\mathrm{T}}(r_\rho)$,$T_{25}(r_\rho)=D_0^{\mathrm{T}}(r_\rho)+K_2^{\mathrm{T}}(r_\rho)D^{\mathrm{T}}(r_\rho)$。

对所有参数变化轨迹成立,则闭环离散 LPV 重复过程式(3)渐近稳定且满足给定的 H_∞ 性能指标。若上述不等式存在可行解,则依赖于参数的状态反馈控制器增益矩阵为

$$K_1(\rho)=R(\rho)V^{-1},K_2(\rho)=K_2(\rho)。$$

证明　略

注 3:定理 3 所得的条件不是严格的线性矩阵不等式,这样的非凸可行性问题求解是困难的,因此可以采用锥补线性化算法将这个非凸可行性问题转化成受 LMI 约束的最小化问题。

算法:

1）设 $k=0$,选择任意一个初值

$(Q,H,V,X0,X1,X2,R0,R1,R2,K20,K21,K22)^0$ 满足式(7)和 $\begin{bmatrix} Q & I \\ I & H\end{bmatrix}\geqslant 0$　(9)

2）解如下 PLMI 问题 min $Trace(QH^k+Q^kH)$ s. t 式(7)和式(9)。

3）将 $(Q,H,V,X0,X1,X2,R0,R1,R2,K20,K21,K22)$ 代入强制令 $H=Q^{-1}$ 的式(7)中,如果满足 $|Trace(QH)-2m|<\delta$(其中 δ 是充分小的正数,控制收敛精度),则输出可行解 $(Q,H,V,X0,X1,X2,R0,R1,R2,K20,K21,K22)$,退出。

4）置 $k=k+1$,如果 $k>N$(其中 N 是允许的最大迭代数)无解退出,当 $k\leqslant N$ 时转到步骤 2)。

由于对参数的依赖性,不等式(7)对应的是无限维凸优化问题。借助于近似基函数和网格技术可以将其转化为有限维的参数线性矩阵不等式,有如下条件:

$$Y(\rho)=\sum_{j=1}^{n_f}f_j(\rho)Y_j>0 \tag{11}$$

注 4:定理 3 将系统(1)鲁棒 H_∞ 控制器存在的充分条件转化为一个有限维参数线性矩阵不等式组的可解性问题。若式(7)、式(8)具有可行解,则系统式(1)存在形如式(2)的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器。

3　结论

离散 LPV 重复过程是一类特殊的时变 2D 系统,对其求解分析是一个困难问题,故通过参数依赖 Lyapunov 函数思想,设计依赖于参数的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器具有重要的理论和实际意义。

参 考 文 献

1　李俊杰,原明亭,丁军航. 风电系统双馈电机 LPV 模型的稳定性分析. 信息技术与信息化,2008;6:79—80
2　李文强,郑志强. 不确定性无尾飞行器 LPV 变增益控制器设计. 控制工程,2009;16(4):478—484
3　何　矞,周凤岐,周　军. 变质心控制导弹 H_∞ 综合 LPV 鲁棒自动驾驶仪的设计. 西北工业大学学报,2004;22(3):360—364
4　李书臣,徐心和,李　平. 分批重复过程迭代学习广义预测控制. 东北大学学报(自然科学版),2004;25(8):734—737

(下转第 1745 页)

several fractions. The main emphasis is placed on the compositions separation of coarse PS, the effects of the volatiles mass loss time, volume ratio of extractants (n-pentane: isopropanol aqueous solution), gradient solvent types, extracting time&times on the separation efficiency of volatiles, unsulfonated oil, inorganic salt and pure PS are discussed respectively. And the extracted unsulfonated oil and the purified PS fractions were characterized by FT-IR spectra and ESI-MS respectively. The experimental results show that after being heated for 3.5 h at 130℃, the coarse PS can be permitted to dry, and when the volume ratio of extractants (n-pentane: 50% isopropanol aqueous solution) is 1:1, after several times extraction and anti-extraction, the extracted unsulfonated oil is PS-free, and the pure PS can be successfully divided into four or more extracted fractions with different equivalent weight. Compared with the traditional simply liquid-liquid methods, the proposed method is superior to the traditional ones for simple steps and bifunction with PS purifying&fraction dividing, can separate efficiently industrial PS and other similar mixture.

[**Key words**] petroleum sulfonates gradient soxhlet extraction equivalent weight composition anaylsis

(上接第 1739 页)

Robust H_∞ State Feedback Controllers of Discrete LPV Repetitive Processes

LI Yan-hui, LIU Ya-zhe, JIANG Yin-ling, HUANG Na

(Electrical and Information Engineering College, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, P. R. China)

[**Abstract**] With the problem of robust H_∞ state feedback controller design for discrete linear parameter-varying (LPV) repetitive processes, by the introduction of a slack matrix, it exhibits a kind of decoupling between the parameter-dependent Lyapunov functions (PDLF) and the system matrices. Thus a paramerter-varying decoupling robust H_∞ performance criterion is established. Furthermore, a sufficient condition is derived for existence of robust H_∞ state feedback controller in terms of the parameterized linear matrix inequalities (PLMIs) technology and the corresponding controller design is cast into a convex optimization problem of the finite parameter linear matrix inequalities by using approximate basis function and the gridding technique.

[**Key words**] linear parameter-varying (LPV) system repetitive processes H_∞ state feedback controller parameterized linear matrix inequality (PLMI) parameter-dependent Lyapunov functions (PDLF)