第10卷 第32期 2010年11月
1671—1815(2010)32-7875-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 32 Nov. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

新的预条件的 Jacobi 迭代法及比较性定理

田秋菊 宋岱才

(辽宁石油化工大学理学院,抚顺 113001)

摘 要 提出了一种新的预条件矩阵 $P_\alpha=(I+K_\alpha)$,并讨论了该预条件下 Jacobi 迭代法的收敛性,得到了比较性定理,揭示了预条件 Jacobi 迭代法的收敛速度和参数之间的关系。最后给出数值例子验证了该预条件迭代格式优于通常的预条件法。

关键词 预条件矩阵 Jacobi 迭代法 比较定理

中图法分类号 O241.6; **文献标志码** A

求解线性方程组

$$Ax = b \tag{1}$$

时,通常通过预条件的方法加速迭代法的收敛性,即在方程组的两端同时左乘一个非奇异矩阵 $P\in \mathrm{R}^{n\times n}$,使方程组变为

$$PAx = Pb \tag{2}$$

常见预条件矩阵有文献[1]中提到的 $P=(I+S)$ 和文献[2]中提到的 $P=(I+S+K)$,对于系数矩阵为 M-矩阵时,它们都能加快 Jacobi 迭代法的收敛速度。文献[3—5]中也提出了预条件矩阵等。本文考虑用一类新的预条件方法解线性方程组 $Ax=b$,即取

$$P_\alpha = I + K_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 & -\alpha a_{1n} \\ 0 & 1 & -a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}。$$

显然当 $\alpha=0$ 及 $\alpha=1$ 时分别为文献[1,2]的情况,我们在一定条件下得到了该预条件能够加速 Jacobi 迭代法的收敛性,同时从数值例子上可以说明该预条件要优于文献[1—2]的预条件。

为讨论方便,假定 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是具有单位对角元素的非奇异 M-矩阵。设 $A=I-L-U$,其中 I 为单位矩阵,$-L$,$-U$ 分别是矩阵 A 的严格下三角和严格上三角矩阵,所得到经典的 Jacobi 迭代法的迭代矩阵 $B=M^{-1}N=I^{-1}(L+U)$。预条件后 $A_\alpha=(I-I_\alpha)-(L-L_\alpha)-(U-U_\alpha+K_\alpha)=M_\alpha-N_\alpha$,其中 I_α,$-L_\alpha$,$-U_\alpha$ 分别是 $K_\alpha L+K_\alpha U$ 的对角,严格下三角和严格上三角矩阵,且

$$M_\alpha = I - I_\alpha, N_\alpha = L - L_\alpha + U - U_\alpha + K_\alpha \tag{3}$$

在预条件下 Jacobi 迭代法的迭代矩阵 $B_\alpha=M_\alpha^{-1}N_\alpha$。

1 基础知识

定义 1[6] 如果矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足:$a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$,$A$ 是非奇异的且 $A^{-1}\geqslant 0$,则称 A 为非奇异的 M-矩阵。

定义 2[6] 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵,若 M 为非奇异矩阵,则称 $A=M-N$ 为 A 的一个分裂,这一分裂:

a) 非负的,如果 $M^{-1}N\geqslant 0$;

b) M-分裂,如果 M 为 M-矩阵且 $N\geqslant 0$;

c) 弱正规分裂,如果 $M^{-1}\geqslant 0$ 且 $M^{-1}N\geqslant 0$。

引理 1[6] 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in Z^{n\times n}$,则 A 是 M-矩阵的充要条件是 A 可逆且 $A^{-1}\geqslant 0$。

引理 2[7] 如果矩阵 A 是非奇异且 $A^{-1}\geqslant 0$,则称 A 是单调矩阵;A 为单调矩阵的充要条件是:如果 $Ax\geqslant 0$,则有 $x\geqslant 0$。

2010年9月3日收到 辽宁省教育厅高校科研项目(2009T062)资助

第一作者简介:田秋菊(1978—),女,辽宁沈阳市人,讲师,研究方向:数值代数。

引理3[8] 如果矩阵 A 是一个非负矩阵,则

1) A 有一个非负的特征值等于它的谱半径$\rho(A)$;

2) A 有一个非负的特征向量 $x\neq 0$ 与$\rho(A)$相对应;

3) A 的任意元素增加时,$\rho(A)$不减。

引理4[8] 如果矩阵 A 是一个非负矩阵,1)对于某个非负向量 $x\neq 0$,如果 $\alpha x\leqslant Ax$ 则 $\alpha\leqslant\rho(A)$;2)对于某个正向量 x,如果 $Ax\leqslant\beta x$ 则 $\rho(A)\leqslant\beta$。

引理5 设 A,B 是非负矩阵,对于非负向量 x,如果 $Ax\leqslant Bx$ 则$\rho(A)\leqslant\rho(B)$。

证明 A 是一个非负矩阵,由引理 3 可知$\rho(A)=\lambda>0$,其中 λ 为 A 的一个非负的特征值,并且 $\lambda=\rho(A)>0$ 对应一个非负的特征向量 $x\neq 0$,$\therefore Ax=\lambda x\leqslant Bx$,由引理 4 可知 $\lambda\leqslant\rho(B)$,所以$\rho(A)\leqslant\rho(B)$。

引理6[3] 设 $A=M-N$ 为 A 的 M-分裂,则$\rho(M^{-1}N)<1$当且仅当 A 是非奇异 M-矩阵。

引理7[9] 设 $A=M_1-N_1=M_2-N_2$ 是 A 的两个弱正规分裂,如果 $A^{-1}\geqslant 0$,并且下列条件之一成立:(1) $N_1\leqslant N_2$;(2) $M_1^{-1}\geqslant M_2^{-1}$,$N_1\geqslant 0$;(3) $M_1^{-1}\geqslant M_2^{-1}$,$N_2\geqslant 0$ 则 $\rho(M_1^{-1}N_1^{-1})\leqslant\rho(M_2^{-1}N_2)<1$。

2 主要结论

定理1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是非奇异的 M-矩阵,$A=M-N$和 $A_\alpha=M_\alpha-N_\alpha$ 分别是 A 和 A_α的 Jacobi 分裂,如果 A 满足 $0\leqslant a_{i,i+1}a_{i+1,i}<1$,$(i=2,3,\cdots,n-1)$,$1-a_{12}a_{21}-\alpha a_{1n}a_{n1}>0$,$(1-\alpha)a_{1n}-a_{12}a_{2n}<0$,$\alpha\geqslant 0$,则有 $\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)\leqslant\rho(M^{-1}N)<1$。

证明 由于 $0\leqslant a_{i,i+1}a_{i+1,i}<1$,$i=2,3,\cdots,n-1$。所以有 $M_\alpha=I-I_\alpha$ 是非奇异的 M-矩阵,从而 $M_\alpha^{-1}=(I-I_\alpha)^{-1}=I+I_\alpha+I_\alpha^2+\cdots\geqslant I=M^{-1}\geqslant 0$;

$$N_\alpha=L-L_\alpha+U-U_\alpha+K_\alpha\geqslant 0。$$

A 是 M-矩阵,由引理 1 可知 $A^{-1}\geqslant 0$,再由引理 2 可知,对于非负向量 x 有 $Ax\geqslant 0$,从而$(A_\alpha-A)x=[(I+K_\alpha)A-A]x=K_\alpha Ax\geqslant 0$。因此 $A_\alpha x\geqslant Ax\geqslant 0$,由 $M_\alpha^{-1}\geqslant I=M^{-1}\geqslant 0$,所以有 $M_\alpha^{-1}A_\alpha x\geqslant M^{-1}Ax$,即 $M_\alpha^{-1}(M_\alpha-N_\alpha)x\geqslant M^{-1}(M-N)x$,从而 $M_\alpha^{-1}N_\alpha x\leqslant M^{-1}Nx$,由于 $M_\alpha^{-1}N_\alpha\geqslant 0$,$M^{-1}N=L+U\geqslant 0$,由引理 5 可知 $\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)\leqslant\rho(M^{-1}N)$。

另一方面,$A=M-N$,其中 $M=I$,$N=L+U$,有 $M^{-1}=I\geqslant 0$,$N=L+U\geqslant 0$。

从而 $A=M-N$ 也是 A 的 M-分裂,由引理 6 可知$\rho(M^{-1}N)<1$,因此

$$\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)\leqslant\rho(M^{-1}N)<1。$$

定理2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是非奇异的 M-矩阵,$A_\alpha=(I+K_\alpha)A=M_\alpha-N_\alpha$ 和 $A_\beta=(I+K_\beta)A=M_\beta-N_\beta$ 分别是 A_α 和 A_β 的 Jacobi 分裂。如果 $0\leqslant a_{i,i+1}a_{i+1,i}<1$,$(i=2,3,\cdots,n-1)$,$1-a_{12}a_{21}-\alpha a_{1n}a_{n1}>0$,$(1-\alpha)a_{1n}-a_{12}a_{2n}<0$,$0\leqslant\alpha\leqslant\beta$,则有$\rho(M_\beta^{-1}N_\beta)\leqslant\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)<1$。

证明 $A=(I+K_\alpha)^{-1}A_\alpha=(I+K_\alpha)^{-1}M_\alpha-(I+K_\alpha)^{-1}N_\alpha=M_1-N_1$,

其中 $M_1=(I+K_\alpha)^{-1}M_\alpha$,$N_1=(I+K_\alpha)^{-1}N_\alpha$,

同理 $A=(I+K_\beta)^{-1}A_\beta=(I+K_\beta)^{-1}M_\beta-(I+K_\beta)^{-1}N_\beta=M_2-N_2$,

其中$M_2=(I+K_\beta)^{-1}M_\beta$,$N_2=(I+K_\beta)^{-1}N_\beta$,

$M_1^{-1}=M_\alpha^{-1}(I+K_\alpha)=(I-I_\alpha)^{-1}(I+K_\alpha)=(I+I_\alpha+I_\alpha^2+\cdots)(I+K_\alpha)\geqslant I+K_\alpha\geqslant 0$,

$M_1^{-1}N_1=M_\alpha^{-1}N_\alpha\geqslant 0$,所以 $A=M_1-N_1$ 为 A 的弱正规分裂。

同理 $A=M_2-N_2$ 也为 A 的弱正规分裂。

$A=(a_{ij})_{n\times n}$是非奇异的 M-矩阵,由引理 1 可知 $A^{-1}\geqslant 0$。

$$由于 N_1-N_2=\begin{pmatrix}(\beta-\alpha)a_{1n}a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & (\alpha-\beta)a_{1n}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}。$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta$ 时 $N_1-N_2\geqslant 0$,即 $N_1\geqslant N_2$,

由引理 1 可知 $\rho(M_2^{-1}N_2^{-1})\leqslant\rho(M_1^{-1}N_1)<1$,即 $\rho(M_\beta^{-1}N_\beta)\leqslant\rho(M_\alpha^{-1}N_\alpha)<1$。

3 数值例子

设系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.25 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix}$。

由定理 1,定理 2 条件可知 $0 \leqslant \alpha < 2$,经预条件 $P_\alpha = (I + K_\alpha)$ 作用后,得到在不同参数下预条件 Jacobi 迭代矩阵的谱半径 $\rho(M_\alpha^{-1} N_\alpha)$。我们对不同的 α 取值计算结果见表 1。

表 1　不同 α 值计算结果

α	$\rho(M_\alpha^{-1} N_\alpha)$
0	0.658 6
0.2	0.633 2
0.4	0.604 4
0.6	0.573 8
0.8	0.538 6
1	0.498 0
1.2	0.450 2
1.4	0.391 7
1.6	0.315 2
1.8	0.205 4

由上表可以看出,$\alpha = 0$ 时,Jacobi 迭代法谱半径为 0.658 6;$\alpha = 1$ 时,谱半径为 0.498 0。其它为预条件 $P_\alpha = (I + K_\alpha)$ 时 Jacobi 迭代法的谱半径,可见此预条件优于文献[1,2]的结果。

参　考　文　献

1　Niki H, Harada K, Morimoto M, *et al.* The survey of preconditioners used for accelerating the rate of convergence in the Grass-Seidel method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004; 165(5):587—600

2　常岩磊,张国风,赵景余. 新的预条件 AOR 迭代法和新的比较定理. 兰州大学学报,2009;45(1):112—114

3　Li W, Sun W W. Modified Grass-Seidel type methods and Jacibi type methods for Z-matrices. Linear Algebra Appl, 2000; 317(1): 227—240

4　Kohno T, Kotaemori H. Niki H, *et al.* Improving the modified Gauss-seidiel method for Z-matrices. Linear Appl, 1997;267:113—123

5　Kotakemori H, Niki H, Okamoto N. Accelerated iterative method for Z-matrices. Comput Appl Math, 1996;75:89—97

6　Kolotilina Y L. Two-sided bounds for the inverse of an H-matrice. Lin Alg Appl, 1995;225:117—123

7　Young D. Iterative Solution of Larage Linear systems. New York: Academic Press, 1971

8　Varga R S. Matrix iterative analysis. Berlin: prentice Hall Inc, 1962

9　Nabben R. A note on comparison theorems for splittings and multi-splittings of Hermitian of Hermitian positive definite marrices. Linear Algebra Appl, 1996;233:67—80

New Preconditioned Jacobi Iterative Method and Comparison Theorems

TIAN Qiu-ju, SONG Dai-cai

(School of Sciences, Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology, Fushun 113001, P. R. China)

[**Abstract**]　A new preconditioned matrix $P_\alpha = (I + K_\alpha)$ is proposed, and the preconditioned Jacobi iterative method is discussed. Some comparison theorems are obtained, and the relation between the convergence rate of preconditioned Jacobi iterative method and the parameters is brought to light. Finally a numerical example is given to show that the precondition is superior the usual preconditions method.

[**Key words**]　preconditioned matrix　　Jacobi iterative method　　comparison theorem