第 10 卷 第 32 期 2010 年 11 月
1671—1815(2010)32-7986-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 32 Nov. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

一类线性内部奇点边值问题的区间分段求解

阮宗利 李维国
(中国石油大学(华东)数学与计算科学学院,东营 257061)

摘 要 对一类线性的、具有单个内部奇点的奇异边值问题采用区间分段处理,从而较好地刻画解的奇异行为。给出的数值例子说明了求解该类问题的具体方法与步骤,其计算结果表明,该方法是有效的。

关键词 奇异边值问题 可去奇点 区间分段 幂级数法
中图法分类号 O175.1; **文献标志码** A

奇异微分方程边值问题通常采用差分法求解,跨越奇点进行差分近似,显然它不能较好地刻画解的奇异行为[1]。为避免这种缺陷,现讨论一类线性奇异边值问题的分段求解,其为奇异点出现区间内部的情形,而奇点在区间边界的情形已在文献[2]中讨论过。

1 问题的提出

考虑以下两点边值问题

$$\begin{cases} v''(x) + P(x)v'(x) + Q(x)v(x) = R(x) \\ v(a) = \alpha, v(b) = \beta, a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \tag{1}$$

其中,$P(x)$、$Q(x)$和 $R(x)$均为已知函数。

线性方程(1)若在点 $x = x_s$,$P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$都是解析的,则点 x_s 为方程(1)的常点,否则为奇点。对于方程(1),若 $x = x_s$ 是它的奇点,但 $(x-x_s)P(x)$、$(x-x_s)^2Q(x)$及$(x-x_s)^2R(x)$在该点都是解析的,则点 x_s 为方程(1)的正则奇点,否则为非正则奇点。

设问题(1)有一个正则奇点 $x = x_s$,根据 Frobenius 方法[3],方程两边乘$(x-x_s)^2$ 后有

$$(x-x_s)^2v''(x) + (x-x_s)P_1(x)v'(x) + Q_1(x)v(x) = R_1(x) \tag{2}$$

其中 $P_1(x) = (x-x_s)P(x)$,$Q_1(x) = (x-x_s)^2Q(x)$,$R_1(x) = (x-x_s)^2R(x)$。由于 x_s 是正则奇点,所以 $P_1(x)$、$Q_1(x)$和 $R_1(x)$在 x_s 都是解析的。

现考虑方程(2)对应的齐次方程

$$(x-x_s)^2v''(x) + (x-x_s)P_1(x)v'(x) + Q_1(x)v(x) = 0 \tag{3}$$

设此方程的解有如下形式

$$v(x) = (x-x_s)^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_s)^m \tag{4}$$

其中 r 和 a_m 均为待定系数,且设 $a_0 \neq 0$。若引进幂级数 $u(x) = \sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$,则式(4)可重写为

$$v(x) = (x-x_s)^ru(x-x_s) \tag{5}$$

其一、二阶导数分别为

$$v'(x) = r(x-x_s)^{r-1}u(x-x_s) + (x-x_s)^ru'(x-x_s) \tag{6}$$

$$v''(x) = r(r-1)(x-x_s)^{r-2}u(x-x_s) + 2r(x-x_s)^{r-1}u'(x-x_s) + (x-x_s)^ru''(x-x_s) \tag{7}$$

现将式(5)—式(7)代入齐次方程(3),得到

$$(x-x_s)^2u''(x) + (x-x_s)[2r + P_1(x)]u'(x) + [r(r-1) + rP_1(x) + Q_1(x)]u(x) = 0 \tag{8}$$

将上式置 $x = x_s$、并由 $a_0 \neq 0$ 得

$$r(r-1) + rP_1(x) + Q_1(x) = 0 \tag{9}$$

该二次方程即为指示方程,它是指数 r 必须满足的方程,其两个解 $r = r_1$、$r = r_2$ 即为指示根。方程(3)的解的形式因指示根的不同情况而不同[3],具体为

2010 年 8 月 23 日收到 中国石油大学(华东)自主创新科研计划项目(09CX04062A)资助
第一作者简介:阮宗利(1978—),男汉族,福建宁化人,讲师,硕士,研究方向:数值软件开发。

(1) 若 $r_1 - r_2$ 不等于整数,则

$$v_1(x) = (x - x_s)^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_s)^m, (a_0 = 1),$$

$$v_2(x) = (x - x_s)^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_s)^m, (b_0 = 1)。$$

(2) 若 $r_1 = r_2 = r$,则

$$v_1(x) = (x - x_s)^{r} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_s)^m, (a_0 = 1),$$

$$v_2(x) = (x - x_s)^{r+1} \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_s)^m + v_1(x)\ln(x - x_s)。$$

(3) 若 $r_1 - r_2$ 等于整数,设 $r_1 > r_2$,则

$$v_1(x) = (x - x_s)^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_s)^m, (a_0 = 1),$$

$$v_2(x) = (x - x_s)^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_s)^m + c v_1(x)\ln(x - x_s),$$

其中 c 为常数。

再设方程(1)的一个特解为 $v_3(x)$,则

$$v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) + v_3(x) \tag{10}$$

其中系数 c_1、c_2 为常数,它们可以通过代入边界条件到式(10)确定。

根据文献[4]和文献[5]中关于奇异点级数展开的讨论结果可知,在整个区间,原问题可以用级数来求数值解。然而,上述解法中特解的计算可能是困难的,但是,如果式(1)右端函数 $R(x)$ 是任意常数项,则特解的计算就相对简单。

现假设奇点 x_s 为右端函数 $R(x)$ 的可去奇点,即当 $x \to x_s$ 时,$\lim R(t)$ 存在且为 A,则原问题(1)在奇点 $x = x_s$ 的邻域可以近似为

$$v''(x) + P(x)v'(x) + Q(x)v(x) = A \tag{11}$$

现在对问题(1)的求解分段处理,在奇点邻域可以用近似问题(11)代替,近似问题(11)易采用幂级数解法求解,而在正则区间作为初值问题来处理。下面对内部奇点情形结合例子进行具体讨论。

2　内部奇点($a < x_s < b$)情形

设两个常数 δ_1、δ_2,$a < \delta_1$,$\delta_2 < b$,且 $\delta_1 < x_s < \delta_2$。为简单起见,令 $x_s - \delta_1 = \delta_2 - x_s = \delta$,即 x_s 为$[\delta_1、\delta_2]$的中点。同边界奇点情形,在奇点 $x = x_s$ 的邻域$[\delta_1, \delta_2]$内问题近似为式(11),从而展开成式(10),可求出在点 δ_1、δ_2 处的边界条件 $v(\delta_1)$、$v(\delta_2)$、$v'(\delta_1)$、$v'(\delta_2)$,这便在区间$[a, \delta_1]$和$[\delta_2, b]$导出两个初值问题,而在$[\delta_1, \delta_2]$上的幂级数形式的解由式(10)来近似表示。

例　求解奇异两点边值问题

$$\begin{cases} y'' + 2y'/t = -\sin t/t \\ y(-1) = -1, \quad y(1) = 1 \end{cases}, \ -1 < t < 1 \tag{12}$$

本例中 $a = -1$,$b = 1$,$R(t) = \sin t/t$,奇点 $t_s = 0$ 为 $R(t)$ 的可去奇点,当 $t \to t_s$ 时,$\lim R(t) = -1$ 令 $\delta > t_s = 0$,所以在$[-\delta, \delta]$内方程(12)可近似为

$$y'' + 2y'/t = -1 \tag{13}$$

方程(13)对应齐次方程的指示方程的两个指示根为 $r_1 = 0$、$r_2 = -1$,易得其齐次解为 $y_1(t) = 1$、$y_2(t) = 1/t$,易求得特解 $y_3(t) = -t^2/6$,故方程(13)的解为 $y(t) = c_1 + c_2/t - t^2/6$,$y'(t) = -c_2/t^2 - t/3$,因此问题式(12)、式(13)分别转化为式(14)、式(15)与式(16):

$$\begin{cases} y'' + y'/t = -\sin t/t, t \in [a, -\delta] \\ y(-\delta) = c_1 - c_2/\delta - \delta^2/6, y'(-\delta) = -c_2/\delta^2 + \delta/3 \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} y'' + y'/t = -\sin t/t, t \in [\delta, b] \\ y(\delta) = c_1 + c_2/\delta - \delta^2/6, y'(\delta) = -c_2/\delta^2 - \delta/3 \end{cases} \tag{15}$$

$$y = c_1 + c_2/t - t^2/6, t \in [-\delta, \delta] \tag{16}$$

其中初值问题式(14)要求满足 $y(a) = -1$,初值问题式(15)要求满足 $y(b) = 1$,这两个条件的满足与常数 c_1、c_2 有关,如果取恰当的常数 c_1、c_2 使这两个条件同时满足,即:

$$\begin{cases} y(a, c_1, c_2) = -1 \\ y(b, c_1, c_2) = 1 \end{cases} \tag{17}$$

则问题式(12)就能迎刃而解了,而常数 c_1、c_2 通过解非线性方程组式(17)容易求得。令:

$$f_1(c_1, c_2) = y(a, c_1, c_2) + 1, f_2(c_1, c_2) = y(b, c_1, c_2) - 1,$$

$$C = [c_1, c_2]', F(C) = [f_1(c_1, c_2), f_2(c_1, c_2)]'$$

则问题式(17)可表示为

$$F(C) = 0 \tag{18}$$

该非线性方程组可以通过牛顿等方法求解。

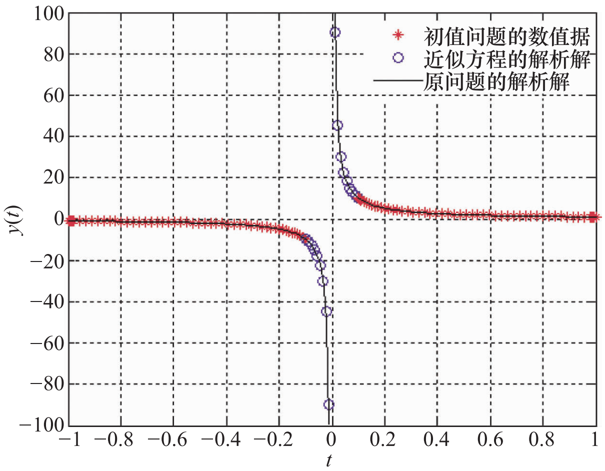

图 1 $\delta=0.1$ 时的解对比曲线

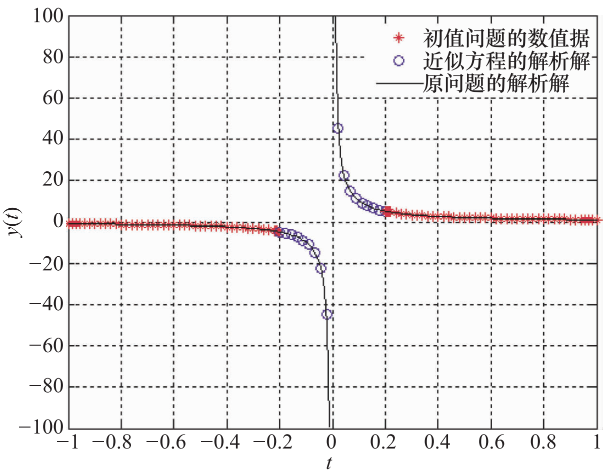

图 2 $\delta=0.2$ 时的解对比曲线

本例分别取 δ 为 0.1 与 0.2，通过 Broyden 秩 1 方法求解方程组式(18)，常数 c_1、c_2 确定分别为 (0.158 53, 0.999 91) 和 (0.158 59, 0.999 96)，允许误差为 10^{-10}。图 1 和图 2 所示为问题式(12)的分段解曲线与其解析解(已知为 $y=\sin t/t+1/t-\sin 1$)曲线的对比。

事实上，由幂级数知，当 $t\to 0$ 时，$\sin t/t+1/t-\sin 1\approx 1-t^2/3!\ +1/t-\sin 1$，对比方程(13)的解 $y=c_1+c_2/t-t^2/6$，易知 c_1、c_2 越接近 $(1-\sin 1,1)\approx(0.158\ 53,1)$ 则解的精度越高。

3 结束语

其他边界条件的情况的处理方法类似，都需要确定常数 c_1、c_2，这也是问题的关键所在。

参 考 文 献

1 何启兵. 奇异微分方程边值问题的数值方法(中国核科技报告). 北京:原子能出版社,1992

2 阮宗利,李维国. 一类线性奇异边值问题的区间分段求解. 科学技术与工程,2010;10(20):4896—4899

3 尚汉翼. 常微分方程. 上海:科学技术出版社,2001

4 Keller H B. Numerical methods for two point boundary value problem. Waltham, Mass.:Blaisdell, 1968

5 Coddington E A, Levinson N. Theory of ordinary differential equations. NewYork:McGraw-Hill,1955

Solving a Class of Linear and Internal Singular Boundary Value Problems with the Partitioning Interval Computation Method

RUAN Zong-li, LI Wei-guo

(College of Mathematics and Computational Science, China University of Petroleum, Dongying 257061, P. R. China)

[**Abstract**] A method for a class of linear BVPs with single internal removable singular point is presented. The method can describe the singular behavior of solution exactly. The way is illustrated in detail by a numerical example. The result of computation shows that the method is effective.

[**Key words**] singular boundary value problem removable singular point partitioning interval power series method