第 10 卷　第 31 期　2010 年 11 月
1671—1815(2010)31-7695-04
科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering
Vol. 10　No. 31　Nov. 2010
© 2010　Sci. Tech. Engng.

研究简报

数学

一种求解常微分方程初值问题的单步法

靳绍礼　李体云　宋玉成
(济南大学理学院,济南 250022)

摘　要　利用 Cotes 求积公式推出求解常微分方程初值问题的 5 点 6 阶方法,进而用 Newton-Cotes 求积公式,推出了求解常微分方程初值问题的更为一般的公式,并给出了相应方法的绝对稳定区间。最后通过数值算例表明,该方法具有一定的优势。

关键词　一阶常微分方程　单步方法　Cotes 求积公式　绝对稳定　相容阶
中图法分类号　O175.1;　**文献标志码**　A

对于常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)),\ x_0=a\leqslant x\leqslant b \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{1}$$

的求解,文献[1]给出的四阶方法,需要用到一阶偏导数,文献[2]利用 Simpson 求积公式,给出了一种求解常微分方程初值问题的四阶单步方法,本文利用 Newton-Cotes 求积公式将此推广到了更为一般的公式,随着求积公式阶数的提高,其对应的局部截断误差的主项系数越来越小,同时给出了该一般公式的绝对稳定区间。

1　方法的构造

对于常微分方程初值问题(1),取步长 h,对 x 从 x_n 到 x_{n+1} 积分得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

在式(2)中,利用 Cotes 求积公式[3]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]。$$

其中 $x_k=a+kh(k=0,1,2,3,4)$,$h=\dfrac{b-a}{4}$,得

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]。$$

分别利用 y_n,y_{n+1} 代替 $y(x_n)$,$y(x_{n+1})$ 得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{90}\left(7f(x_n,y(x_n))+32f\left(x_n+\frac{h}{4},y\left(x_n+\frac{h}{4}\right)\right)+12f\left(x_n+\frac{h}{2},y\left(x_n+\frac{h}{2}\right)\right)+32f\left(x_n+\frac{3h}{4},y\left(x_n+\frac{3h}{4}\right)\right)+7f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right) \tag{3}$$

利用 Euler 公式,则式(3)可表示为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{90}\left(7f(x_n,y_n)+32f\left(x_n+\frac{h}{4},y_n+\frac{h}{4}f(x_n,y_n)\right)+12f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right)+32f\left(x_n+\frac{3h}{4},y_n+\frac{3h}{4}f(x_n,y_n)\right)+7f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))\right) \tag{4}$$

该方法为 5 点单步法,在每一步计算中用到了

2010 年 8 月 19 日收到,8 月 26 日修改　中国教育部博士基金(XBS09239)资助
第一作者简介:靳绍礼(1976—),山东临沂人,讲师,研究生,研究方向:微分方程数值解。

5 个函数值,其中不含导数运算。

2 方法的相容阶和稳定性

定理 1 若初值问题(1)的解 $y(x) \in C^6[a,b]$,则单步方法(4)的相容阶为 6。

证明 由 Cotes 求积公式余项[3],得 $T_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\mathrm{d}x - \frac{h}{90}\left(7f(x_n,y(x_n)) + 32f\left(x_n+\frac{h}{4},y\left(x_n+\frac{h}{4}\right)\right) + 12f\left(x_n+\frac{h}{2},y\left(x_n+\frac{h}{2}\right)\right) + 32f\left(x_n+\frac{3h}{4},y\left(x_n+\frac{3h}{4}\right)\right) + 7f(x_{n+1},y(x_{n+1}))\right) = -\frac{2h}{945}\left(\frac{h}{4}\right)^6 f^6(\xi) = -\frac{h^7}{1\,935\,360}f^6(\xi)$。其中 $\xi \in (a,b)$,故该方法的局部截断误差主项为 $O(h^7)$,所以式(4)的相容阶为 6。

定理 2 式(4)的绝对稳定区间为 $(-2,0)$。

证明 将该方法用于模型方程 $y' = \lambda y$,有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{90}\left(7\lambda y_n + 32\lambda\left(y_n + \frac{h}{4}\lambda y_n\right)\right) + 12\lambda\left(y_n + \frac{h}{2}\lambda y_n\right) + 32\lambda\left(y_n + \frac{3h}{4}\lambda y_n\right) + 7\lambda(y_n + h\lambda y_n) = \left(1 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\right)y_n。$$

由 $|E(\lambda h)| = |1 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2| < 1$,解得

$-2 < \lambda h < 0$,所以该方法的绝对稳定区间为 $(-2,0)$。

3 一般方法的构造

将上述过程推广至更为一般的单步方法.

在式(2)中用 Newton - Cotes 公式[3]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)。$$

式中 $C_k^{(n)}$ 为 Cotes 系数,且有

$$x = a + th,\ h = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + kh,$$

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t。$$

代入并整理可得更为一般的单步法公式

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k, y(x_k)) = y_n + h\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f\left(x_n + \frac{kh}{n}, y\left(x_n + \frac{kh}{n}\right)\right)。$$

结合 Euler 公式,上述公式可表示为

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f\left(x_n + \frac{kh}{n}, y_n + \frac{kh}{n}f(x_n,y_n)\right) \tag{5}$$

值得注意的是,当 $n = 2$ 时就是文献[2]中的公式。

定理 3 单步方法式(5)的绝对稳定区间为 $(-2,0)$。

证明 将式(5)用于模型方程 $y' = \lambda y$,得

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\lambda\left(y_n + \frac{kh}{n}\lambda y_n\right) = \left[1 + \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\lambda h + \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\frac{k}{n}\lambda^2 h^2\right]y_n,$$

其中

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\frac{k}{n} = \frac{1}{2},$$

所以

$$y_{n+1} = \left[1 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\right]y_n,$$

得 $-2 < \lambda h < 0$,所以单步方法式(5)的绝对稳定区间为 $(-2,0)$。

4 方法的改进

在方法式(4)和式(5)中计算 $y(x_n + ih)$ 时均是利用 Euler 公式,这在一定程度上影响了方法的精度,下面采用更高精度的公式对 $y(x_n + ih)$ 进行计算,由文献[3]知,利用左矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)。$$

可得

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))\mathrm{d}x=$$

$$f(x_n,y(x_n))h+\frac{h^2}{2}f'(\xi)。$$

若略去截断误差余项,即得 Euler 公式

$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$。

现在考虑在上述公式中弥补这一误差,即

$$y_{n+1}-y_n=hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}f'(\xi,y(\xi))。$$

其中 $\xi=x_n+ph$,在假定 $y_n=y(x_n)$,有

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}f'(x_n+ph,y(x_n+ph))=$$

$$y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n+ph)。$$

通过与 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处的 Taylor 展开式作比较,可发现当 $p=\frac{1}{3}$时,可得到一个具有 3 阶精度的公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}f'\left(x_n+\frac{h}{3},y\left(x_n+\frac{h}{3}\right)\right) \tag{6}$$

式(6)中 $y\left(x_n+\frac{h}{3}\right)$可用 Euler 公式预测,$y\left(x_n+\frac{h}{3}\right)\approx y_n+\frac{h}{3}f(x_n,y_n)$将式(4)和式(5)中的$y(x_n+ih)$均用式(6)近似,可得式(4)和式(5)的改进方法,数值算例表明,在计算精度上,改进的方法式(4)具有明显的优势。

5　数值算例

例 1　求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=\dfrac{y}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 5\ 000 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

其精确解为 $y(x)=e^{\arctan x}-1$。取步长 $h=0.1$,计算误差结果 $y_n-y(x_n)$如表 1 所示。

表 1　计算结果对比

x_i	Euler 法	改进的 Euler 法	方法(4)	改进的方法(4)
500	0.049 383	−0.004 63	−0.000 82	$-5.708\ 74\times10^{-5}$
1 000	0.049 433	−0.004 64	−0.000 83	$-5.714\ 45\times10^{-5}$
1 500	0.049 45	−0.004 64	−0.000 83	$-5.716\ 35\times10^{-5}$
2 000	0.049 458	−0.004 64	−0.000 83	$-5.717\ 3\times10^{-5}$
2 500	0.049 463	−0.004 64	−0.000 83	$-5.717\ 88\times10^{-5}$
3 000	0.049 466	−0.004 64	−0.000 83	$-5.718\ 26\times10^{-5}$
3 500	0.049 469	−0.004 64	−0.000 83	$-5.718\ 53\times10^{-5}$
4 000	0.049 471	−0.004 64	−0.000 83	$-5.718\ 73\times10^{-5}$
4 500	0.049 472	−0.004 64	−0.000 83	$-5.718\ 89\times10^{-5}$
5 000	0.049 473	−0.004 64	−0.000 83	$-5.719\ 02\times10^{-5}$

从表 1 中的计算结果来看,Euler 法的计算精度最差,这主要是因为该方法的相容阶仅为 1;改进的 Euler 法的相容阶为 2;所以计算精度要好一些;方法(4)的相容阶为 6,因此计算精度更高;而用相容阶为 3 的(6)式对(3)式中的 $y(x_n+ih)$,$\left(i=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$进行计算要比直接用相容阶为 1 的 Euler 公式对(3)式中的 $y(x_n+ih)$,$\left(i=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$进行计算要好得多,算例中改进的方法(4)的计算结果也对该点进行了验证。

6　结论

通过数值算例,本文构造的方法更具有一般性,精度高,计算稳定性好,因此对其研究是有意义的。

参　考　文　献

1　罗蕴玲,王桂祥,王小英. 一个新的求解常微分方程的四阶一步法. 河北农业大学学报,1998;21(3):102—104

2　廖秋明. 一种求解常微分方程初值问题的单步方法. 黔南民族师范学院学报, 2005,6: 1—3

3　李庆扬,王能超,易大义. 数值分析. 武汉:华中科技大学出版社,2005

A Class of Step Method for Solving Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations

JIN Shao-li, LI Ti-yun, SONG Yu-cheng

(School of Science, University of Jinan, Jinan 250022, P. R. China)

[**Abstract**] With Cotes-integration, a class of one step method is got for solving initial value of ordinary differential equations, which is 5 point 6 order method, then with Newton-Cotes-integration. A general method for solving initial value of orinary differential equations is got. At the same time, the corresponding mentods' absolute stability is got. Numerical tests show that these methods are efficient.

[**Key words**] orinary differential equations one step method Cotes-integration absolute stability consistency-order

(上接第 7679 页)

5 姜世楠. 一乙醇胺 CO_2 吸收剂的理化性质. 舰船防化, 2006; (2): 19—23

6 毛松柏, 叶　宁, 丁雅萍, 等. 烟道气中二氧化碳回收新技术的开发和应用. 全国气体净化信息站 2006 年技术交流会论文集, 2006: 13—16

Simulation of Desorption Characteristics Using MEA Scrubbing

LI Tao, FAN Lian-cui, LI Qing-ling

(College of Electromechanical Engineering, Qingdao University of Science & Technology, Qingdao 266061, P. R. China)

[**Abstract**] To rich liquor for the study, effects of reboiler heat duty, nunber of trays, reboiler pressure on CO_2 desorption rate were esearched using PRO/ II flowsheeting software. And the relationship between outlet temperature of lean liquor and reboiler pressure was studied, variations in temperature of each layer plates were analysed. Thus it comes about that, CO_2 desorption rates increased with increasing reboiler heat duty and nunber of trays; reboiler pressure through influence absorption liquid temperature and vapour at the boiling point to affect CO_2 desorption rates, the greater the reboiler pressure higher temperatures.

[**Key words**] MEA CO_2 desorption rate PRO/ II simulation