第10卷 第28期 2010年10月
1671—1815(2010)28-6949-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 28 Oct. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

研究简报

数学

Tilings 与谱对偶性质的证明

周脉东
(陕西师范大学数学与信息科学学院,西安 710062;陕西教育学院数学系,西安 710061)

摘 要 Tilings 与谱分别在几何和分析中起着重要的作用,有许多猜测涉及到它们之间的联系。二者之间没有直接的共轭关系,在二者较强条件下,已给出了 Tilings 与谱的一些特征性质;现利用不等式逼近相应恒等式的方法,证明了其中几个重要的基本定理。

关键词 Tiling 对 谱对 填充对
中图法分类号 O156.3; **文献标志码** A

设 $D\subset R^n$, $0<\mu_L(D)<\infty$, $L^2(D)$ 空间上的内积与范数定义分别为

$$<f,g>_{L^2(D)}:=\int_D \bar{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\|f\|^2_{L^2(D)}:=\int_D |f(x)|^2\mathrm{d}x。$$

若存在 $\Lambda\subset R^n$,使得指数函数系 $E_\Lambda:=\{e^{2\pi i<\lambda,x>}:\lambda\in\Lambda\}$ 构成 $L^2(D)$ 空间上的正交基,则称 D 为谱集,称 (D,Λ) 为谱对。如果存在 $\Gamma\subset R^n$,使得对于任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in\Gamma$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ 都有 $\mu_L((\lambda_1+D)\cap(\lambda_2+D))=0$,则称 (D,Γ) 为填充对;再若有覆盖 R^n(至多除去 Lebesgue 测度为零的集合),则称 (D,Γ) 为 Tiling 对。

参考文献[1]中得出了 Tilings 与谱的一些特征性质,阐明了两者之间的对偶关系。本文利用不等式逼近相应恒等式的方法,证明了其中几个重要的基本定理。

2010年7月12日收到,7月22日修改
作者简介:周脉东(1969—),男,山东阳谷人,硕士,研究方向:分形几何。

定理 1[1] 设 $\Omega,D\subset R^n$ 是具有有限非负 Lebesgue 测度的集合,再设 $\Lambda\subset R^n$ 为离散集,$\Gamma\subset R^n$ 为有限集且 $\Lambda+\Gamma$ 是直和,则下列对偶性质成立。

(1)若 $(\Omega,\Lambda+\Gamma)$ 为谱对且 (D,Λ) 是填充对,则 $\mu_L(D)\mu_L(\Omega)\leqslant|\Gamma|$;

(2)若 $(D,\Lambda+\Gamma)$ 为 Tiling 对且 E_Λ 是 $L^2(\Omega)$ 中的正交系,则 $\mu_L(D)\mu_L(\Omega)\geqslant(|\Gamma|)^{-1}$

证明 令 $|\Gamma|=p$;

(1) 若 $(\Omega,\Lambda+\Gamma)$ 为谱对,则有

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2=(\mu_L(\Omega))^2。$$

又因 $\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant$

$$\int_{\cup D+\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=\int_D\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_J}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t;$$

故 $p\mu_L(\Omega)\geqslant\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t$ 从而 $p\mu_L(\Omega)\geqslant(\mu_L(\Omega))^2\mu_L(D)$;

得 $\mu_L(\Omega)\mu_L(D)\leqslant p=|\Gamma|$。

(2)若 $(D,\Lambda+\Gamma)$ 为 Tiling 对且 E_Λ 是 $L^2(\Omega)$ 中的正交系,则 $\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant$

$\int_{\cup D+\Lambda+\gamma_j,1\leqslant j\leqslant p}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_J}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t\leqslant$ $\mu_L(D)p(\mu_L(\Omega))^2$;故 $\mu_L(\Omega)\mu_L(D)\geqslant\frac{1}{p}=(|\Gamma|)^{-1}$。

其对偶命题如下：

定理 1′[1] 设 $\Omega,D\subset R^n$ 是具有有限非负 Lebesgue 测度的集合，再设 $\Lambda\subset R^n$ 为离散集，$\Gamma\subset R^n$ 为有限集且 $\Lambda+\Gamma$ 是直和，则下列对偶性质成立。

(1) $E_{\Lambda+\Gamma}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的正交系且 (D,Λ) 为 *Tiling* 对，则 $\mu_L(D)\mu_L(\Omega)\geqslant|\Gamma|$；

(2) 若 $(D,\Lambda+\Gamma)$ 为填充对且 (Ω,Λ) 是谱对，则 $\mu_L(D)\mu_L(\Omega)\leqslant(|\Gamma|)^{-1}$。

证明 令 $|\Gamma|=p$，则

(1) $\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=$

$$\int_{\cup D+\Lambda=\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=$$

$$\int_D\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_J}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t。$$

故 $p\mu_L(\Omega)=\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t$；又因 $E_{\Lambda+\Gamma}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的正交系，故

$$p\mu_L(\Omega)\leqslant(\mu_L(\Omega))^2\mu_L(D),\mu_L(\Omega)\mu_L(D)\geqslant p=|\Gamma|。$$

(2) 因 (Ω,Λ) 是谱对，故 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2=(\mu_L(\Omega))^2$；又因若 $(D,\Lambda+\Gamma)$ 为填充对，则 $\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant$

$$\int_{\cup D+\Lambda+\gamma_j,1\leqslant j\leqslant p}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=$$

$$\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_J}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t=$$

$$p\mu_L(D)(\mu_L(\Omega))^2。$$

故 $\mu_L(\Omega)\mu_L(D)\leqslant\frac{1}{p}=(|\Gamma|)^{-1}$。

关于集合 $\Lambda+\Gamma$ 与 Λ 之间关系，有下面的定理成立。

定理 2[1] 设 $\Omega,D\subset R^n$ 是具有有限非负 *Lebesgue* 测度的集合，再设 $\Lambda\subset R^n$ 为离散集，$\Gamma\subset R^n$ 为有限集且 $\Lambda+\Gamma$ 是直和，考虑下列条件(1)、(2)、(3)或(1)′、(2)、(3)：

(1) $\mu_L(D)=|\Gamma|\mu_L(\Omega)$；

(1)′ $\mu_L(D)\mu_L(\Omega)=|\Gamma|$；

(2) (D,Λ) 为填充对；

(3) (D,Λ) 为覆盖对。

则下列对偶性质成立：

(Ⅰ) 在条件 $(\Omega,\Lambda+\Gamma)$ 为 Tiling 对下，三个条件(1)、(2)、(3)中的任何两个隐含第三个条件；

(Ⅱ) 在条件 $(\Omega,\Lambda+\Gamma)$ 为谱对下，三个条件(1)′、(2)、(3)中的任何两个隐含第三个条件。

证明 令 $|\Gamma|=p$，设 $f(x)=\sum_{l\in\Lambda}\chi_D(x-l)$ 其中 $\chi_D(x)$ 为集合 $D\subset R^n$ 特征函数。

$$\{x\in R^n:f(x)>1\}=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\Lambda,\lambda\neq\mu}((D+\lambda)\cap(D+\mu))\tag{1}$$

(Ⅰ)：条件(1)、(2)⇒(3)。

由(2)知 $f(x)\leqslant1$。

故 $\mu_L(D)=\int_{R^n}\chi_D(-x)\mathrm{d}x=$

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{l\in\Lambda}\int_{\cup\Omega+l+\gamma_j}\chi_D(-x)\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{j=1}^{p}\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{j=1}^{p}\int_\Omega\mathrm{d}x=p\mu_L(\Omega)。$$

由条件(1)知 $f(x)=1$ 对几乎处处 $x\in R^n$ 成立。得条件(3)成立。

条件(1)、(3)⇒(2)。

由条件(3)知对几乎处处 $x\in R^n$，有 $f(x)\geqslant1$。

$\mu_L(D)=\int_{R^n}\chi_D(-x)\mathrm{d}x=$

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{l\in\Lambda}\int_{\cup\Omega+l+\gamma_j}\chi_D(-x)\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{j=1}^{p}\int_\Omega f(x)dx\geqslant\sum_{j=1}^{p}\int_\Omega\mathrm{d}x=$$

$$p\mu_L(\Omega)=\mu_L(D)。$$

故 $f(x)=1$ 对几乎处处 $x\in R^n$ 成立，应用式(1)得 $\mu_L((D+\lambda)\cap(D+\mu))=0$，得条件(2)成立。

条件(2)、(3)⇒(1)

由条件(2)、(3)知 $f(x)=1$ 对几乎处处 $x\in R^n$ 成立，故

$\mu_L(D)=\int_{R^n}\chi_D(-x)\mathrm{d}x=$

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{l\in\Lambda}\int_{\cup\Omega+l+\gamma_j}\chi_D(-x)\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{j=1}^{p}\int_{\Omega}f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{p}\int_{\Omega}\mathrm{d}x = p\mu_L(\Omega)。$$

(Ⅱ):(1)′、(2)⇒(3)。

由条件$(\Omega,\Lambda+\Gamma)$为谱对,有 $\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2=(\mu_L(\Omega))^2$ 成立。由条件(2)得:

$$\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant \int_{\cup D+\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_D\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_J}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t$$

由条件(1)′、(2)得:

$$p\mu_L(\Omega)\geqslant\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t=\mu_L(D)(\mu_L(\Omega))^2=p\mu_L(\Omega)。$$

(1)′、(3)⇒(2)。

$$\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\chi_{\cup\lambda\in\Lambda(D+\lambda)}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\sum_{\lambda\in\Lambda}\chi_{D+\lambda}(t)\,\mathrm{d}t=\int_D\sum_{\lambda\in\Lambda}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t。$$

故由条件(1)′可得

$$p\mu_L(\Omega)\leqslant\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t=\mu_L(D)(\mu_L(\Omega))^2=p\mu_L(\Omega)。$$

(2)、(3)⇒(1)′。

由条件(2)、(3)知(D,Λ)为 Tiling 对,又因$(\Omega,\Lambda+\Gamma)$为谱对,故

$$\mu_L(\Omega)=\int_{R^n}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{\cup D+\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t)|^2\mathrm{d}t=\int_D\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_J}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t;$$

$$p\mu_L(\Omega)=\int_D\sum_{j=1}^{p}\sum_{\lambda\in\Lambda+\gamma_j}|\hat{\chi}_\Omega(t+\lambda)|^2\mathrm{d}t=\mu_L(D)(\mu_L(\Omega))^2;$$

$$\mu_L(D)(\mu_L(\Omega))^2=p=|\Gamma|。$$

同理下列定理也成立。

定理 2′[1] 设$\Omega,D\subset R^n$是具有有限非负 Lebesgue 测度的集合,再设$\Lambda\subset R^n$为离散集,$\Gamma\subset R^n$为有限集且$\Lambda+\Gamma$是直和,考虑下列条件(1)、(2)、(3)或(1)′、(2)、(3)。

(1) $\mu_L(\Omega)=|\Gamma|\mu_L(D)$;

(1)′$\mu_L(D)\mu_L(\Omega)=|\Gamma|^{-1}$;

(2) $(D,\Lambda+\Gamma)$为填充对;

(3) $(D,\Lambda+\Gamma)$为覆盖对。

则下列对偶性质成立:

(Ⅰ) 在条件(Ω,Λ)为 Tiling 对下,三个条件(1)、(2)、(3)中的任何两个隐含第三个条件;

(Ⅱ) 在条件(Ω,Λ)为谱对下,三个条件(1)′、(2)、(3)中的任何两个隐含第三个条件。

参 考 文 献

1 李建林. 谱与 Tilings 的共轭性质 中国科学:数学,2010;(40—1):21—32

The Proof of Duality Properties between Tilings and Spectra

ZHOU Mai-dong

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, P. R. China

Department of Maths, Shaanxi Institute of Education, Xi'an 710061, P. R. China)

[**Abstract**] Tilings and spectra play an important role in analysis and geometry respectively. Many conjectures concern the relations between tilings and spectra. There is no complete duality between tiling and spectrality. On the stronger condition, some characteristic properties of spectra and tilings are derived. The technique of approximating identity from the corresponding inequality is used to prove several important theorems.

[**Key words**] tiling pair spectral pair packing pair