第10卷 第28期 2010年10月
1671—1815(2010)28-6857-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 28 Oct. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

论 文

数学

一类具有收获率的捕食-被捕食模型的渐近性

王爱丽
(宝鸡文理学院数学系,宝鸡 721013)

摘 要 讨论了一类具有收获率的捕食-被捕食模型。利用代数方程得到了该模型存在平衡点的充分条件,应用 Hurwitz 判别法则及特征方程给出了该模型的平衡点局部渐近稳定的充分条件。最后通过实例说明所得结论的可实现性。

关键词 捕食-被捕食模型 渐近稳定性 收获率

中图法分类号 O175.7; **文献标志码** A

通过对具有收获率的食饵与捕食者系统的分析,可以预测种群的发展变化趋势,及人们的捕获行为对种群的影响,并判断付出多大的捕获努力量,既可维持生态系统的平衡,又能使收获量达到最大来满足人类的需要。故对具有收获率的食饵与捕食者系统的研究,将对可更新资源进行合理的开发与利用问题起指导作用,直接关系到资源的可持续发展问题,其意义尤为重要[1,2]。另一方面,在对生物学动力系统的研究中,人们所关注的问题是相互作用的各物种的长期行为,从数学角度看,即关注的是一类微分方程组平衡点的存在性、稳定性等。例如 Lotka-Volterra 模型中,方程组往往拥有多个平衡解,而研究者最感兴趣的是方程组的解是否会收敛于某一个平衡解;即在不同的平衡解中寻求一个稳定解的充分条件。关于平衡解的稳定性方面的研究,已有很多成果[3—5]。但是对于理论结果的可实现性,以及所得结果的生态意义方面的研究,工作较少。基于此,本文考虑一类食饵种群具有收获率的生态模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(b - a_{11}x - a_{12}y) - F \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(-d + Ea_{12}x) \end{cases} \tag{1}$$

式(1)中,x 表示食饵种群的数量,y 表示捕食者种群的数量,b 表示食饵种群的内禀增长率,a_{11} 表示食饵种群的内部竞争率,a_{12} 表示捕食者的捕食效率,d 表示捕食者种群的自然死亡率,F 表示收获率,E 为捕食者的捕食转化率,所有参数均非负。

引理 1 若系统(1)满足条件

(A_1) $b^2 > 4a_{11}F$。

则式(1)有平衡点 $E_1(\bar{x}_1, 0)$,$E_2(\bar{x}_2, 0)$,其中

$$\bar{x}_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a_{11}F}}{2a_{11}}, \quad \bar{x}_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4a_{11}F}}{2a_{11}}。$$

引理 2 若系统(1)满足条件

(A_2) $Ebda_{12} - a_{11}d^2 > E^2a_{12}^2F$,

则式(1)有平衡点 $E_3(x^*, y^*)$,其中

2010年7月6日收到 宝鸡文理学院重点科研计划项目(ZK0912)、2010年陕西省教育厅科研项目资助

作者简介:王爱丽(1978—),女,陕西旬邑人,硕士,副教授,研究方向:生态数学。E-mailaily_wang83@163.com。

$$x^* = \frac{d}{Ea_{12}},\quad y^* = \frac{b}{a_{12}} - \frac{a_{11}d}{Ea_{12}^2} - \frac{EF}{d}。$$

1 平衡点稳定性分析

定理 1 若系统(1)满足条件(A_2)及条件

(A_3) $E^2a_{12}^2F < a_{11}d^2$,

(A_4) $\left(\frac{a_{12}EF}{d} - \frac{a_{11}d}{Ea_{12}}\right)^2 - 4\left(bd - \frac{a_{11}d^2}{Ea_{12}} - EFa_{12}\right) \geqslant 0$。

则 $E_3(x^*, y^*)$为稳定平衡点。

证明 作变换 $u = x - x^*, v = y - y^*$,则有

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (u + x^*)[b - a_{11}(u + x^*) - a_{12}v] - F \\ \frac{dv}{dt} = (v + y^*)[-d + Ea_{12}(u + x^*)] \end{cases} \tag{2}$$

模型(2)的线性近似模型为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b - 2a_{11}x^* - a_{12}y^*)u - a_{12}x^*v \\ \frac{dv}{dt} = Ea_{12}y^*u + (-d + Ea_{12}x^*)v \end{cases} \tag{3}$$

式(3)的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \left(\frac{a_{12}EF}{d} - \frac{a_{11}d}{Ea_{12}}\right)\lambda + \left(bd - \frac{a_{11}d^2}{Ea_{12}} - EFa_{12}\right) = 0。$$

由条件(A_3)和(A_4)知,上述特征方程有两个负实根。所以,E_3 为稳定平衡点。定理得证。

定理 2 若系统(1)满足条件(A_1)及条件

(A_5) $Ea_{12}(b + \sqrt{b^2 - 4a_{11}F}) < a_{11}d^2$。

则 E_1 为稳定平衡点。

证明 作变换 $u = x - \bar{x}_1, v = y$,代入式(1)得

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (u + \bar{x}_1)[b - a_{11}(u + \bar{x}_1) - a_{12}v] - F \\ \frac{dv}{dt} = v[-d + Ea_{12}(u + \bar{x}_1)] \end{cases} \tag{4}$$

模型(4)的线性近似模型为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = (b - 2a_{11}\bar{x}_1)u - a_{12}\bar{x}_1v \\ \frac{dv}{dt} = (-d + Ea_{12}\bar{x}_1)v \end{cases} \tag{5}$$

式(5)的特征方程

$$\det(A - \lambda E) = [\lambda - (b - 2a_{11}\bar{x}_1)][\lambda - (-d + Ea_{12}\bar{x}_1)] = 0 \tag{6}$$

式(6)的特征根为 $\lambda_1 = -\sqrt{b^2 - 4a_{11}F}$, $\lambda_2 = -d + \frac{Ea_{12}(b + \sqrt{b^2 - 4a_{11}F})}{2a_{11}}$。由($A_1$),($A_5$)知,$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$,所以 E_1 是稳定的。定理得证。

定理 3 若系统(1)满足条件(A_1),则 E_2 为不稳定平衡点。

证明 类似于定理 3 的证明得到相应的特征根分别为

$$\lambda_1 = \sqrt{b^2 - 4a_{11}F},\ \lambda_2 = -d + \frac{Ea_{12}(b - \sqrt{b^2 - 4a_{11}F})}{2a_{11}}。$$

由于 $\lambda_1 > 0$,所以 E_2 是不稳定的。定理得证。

2 应用举例

考虑模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(2 - 0.1x - 0.2y) - 9 \\ \frac{dy}{dt} = y(-3 + 0.18x) \end{cases} \tag{7}$$

可以验证,模型(7)满足条件(A_1)—(A_5);故由引理 1 及引理 2 知,模型(7)有三个平衡点 $E_1(10 + \sqrt{10}, 0)$, $E_2(10 - \sqrt{10}, 0)$, $E_3\left(\frac{50}{3}, \frac{419}{300}\right)$。依据定理 1 可知,$E_3\left(\frac{50}{3}, \frac{419}{300}\right)$是局部渐近稳定的,即两种群将长期共存,它们的密度将分别趋向于 $\frac{50}{3}, \frac{419}{300}$;由定理 2 知,$E_1(10 + \sqrt{10}, 0)$是稳定点;由定理 3 可知,$E_2(10 - \sqrt{10}, 0)$是不稳定点。

3 生态意义

本文讨论了一类食饵种群具有收获率的捕食-被捕食模型。结果表明,系统(1)有三个非负平衡点,两个点是稳定的,一个点是不稳定的。在满足一定的条件下,这个系统的演化将达到一个静态的

(下转第 6865 页)

leles between hypertensive and normotensive groups in this population ($P > 0.05$). To eliminate influence of age, all subjects are divided into 4 subgroups with different age-segment, which were 30 ~, 40 ~, 50 ~, and (60 ~ 70) years old. That frequency of Gly16/Gly genotype in EH group was significantly higher than normotensive group in subgroup of (30 ~ 39) years old ($P = 0.039$), and there was still significant difference between EH and normotensive group when Arg16/Arg and Arg16/Gly were combined ($P = 0.012$) are found. No significant differences were found in other three subgroup. These data show that Gly16/Gly genotype of β_2-AR gene may play an important role in development of hypertension in young kazakans (< 40 years old) of Xinjiang.

[**Key words**] β_2-adrenergic receptor gene genetic polymorphism essential hypertension Kazakans

(上接第 6858 页)

平衡,即捕食者种群与被捕食者种群会共存,这将有利于生态系统的稳定。通过上面的分析知,对模型(1)的边界平衡点 E_1 来说,此时 $y = 0$,即就是捕食者种群趋于灭绝,而被捕食者种群将是幸存的,且密度稳定在 $\bar{x}_1$(见定理2)。在这种情况下没有种群共存,不利于生态系统维持稳定及生物进化。特别地,模型(1)在一定条件下可存在正平衡点 E_3 (x^*, y^*),且该平衡点可以是局部渐近稳定的(见定理1),意味着两种群将长期共存,它们的密度将分别趋向于 x^*, y^*。这说明两种群的数量(密度)会达到一个稳定值,系统就会趋于二者共存的状态。

参 考 文 献

1 何德明,窦霁虹,曹 薇. 具有收获率的一类食饵捕食系统的定性分析. 西北大学学报,2009;39(1):19—22

2 黄发金. 一类具有收获率和比率的时滞阶段结构的扩散捕食系统的多重正周期解. 工程数学学报,2009;26(4):671—679

3 Fan Yonghong, Li Wantong, Wang Linlin. Periodic solution of delayed ratio-dependent predator-prey models with monotonic or nonmonotonic functional responses. Nonlinear Analysis: Real World Applications 2004(5):247—263

4 Xu Rui, Ma Zhien. Stability and Hopf bifurcation in a predator-prey model with stage structure for the predator. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008; (9):1444—1460

5 王爱丽,薛秋芳. 具有多时滞和广义扩散的 N-种群竞争反馈控制系统的持久性. 工程数学学报,2009;26(6):985—989

Asymptotic Behavior of a Class of Predator-prey Model with Harvesting Rate

WANG Ai-li

(Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, P. R. China)

[**Abstract**] A class of predator-prey model with harvesting rate is discussed. By using the algebraic equation theory, the sufficient conditions for existence of equilibrium points of the model are obtained. By using Hurwitz theory and the characteristic equation, the sufficient conditions for the locally asymptotic stability of the equilibrium points of the model are given. Moreover, the feasibility of the result is shown by example.

[**Key words**] predator-prey model asymptotic stability harvesting rate