第10卷 第27期 2010年9月
1671—1815(2010)27-6607-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 27 Sep. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

论 文

数 学

不含3,4-圈的平面图的均匀染色

谭 香
(山东财政学院,济南 250014)

摘 要 图的正常点染色称为均匀的,若每个色类所含的顶点数至多相差1.利用平面图的性质及换色法技巧。证明了若图 G 是 $\Delta(G)\geqslant 6$ 且不含3,4-圈的平面图,则对任意的 $m\geqslant\Delta(G)$,图 G 是均匀 m-可染的.

关键词 平面图 均匀染色 圈
中图法分类号 O157.5; **文献标志码** A

所考虑的图都是简单无向图,文中未注明的符号均参见文献[1]。设 G 是一个图,用 $V(G)$,$|G|$,$E(G)$,$e(G)$,$\Delta(G)$,$\delta(G)$ 分别表示 G 的顶点集,阶数,边集,边数,最大度和最小度。设 $U,W\subseteq V(G)$,用 $e(U,W)$ 表示两顶点分别在 U,W 中的边的数目,特别地,用 $e(u,W)$ 表示 $e(\{u\},W)$,图 G 的独立 s-集是指所含顶点个数为 s 的独立集。

设 φ 是图 G 的正常 k-染色,若每个色类包含的顶点数目至多相差1,则称 φ 是图 G 的一个 k-均匀染色。若图 G 有 k-均匀染色,则称其是 k-均匀可染的,图 G 可进行均匀 k-染色的最小正整数 k 称为图 G 的均匀色数,记为 $\chi_e(G)$。

1970年,Hajnal 和 Szemeréd[2] 证明了:任意 $\Delta(G)\leqslant m$ 的图 G 均存在均匀 $m+1$-染色,在此基础上,1973年,Meyer 提出如下猜想:

猜想1[3] 如果连通图 G 不为完全图和奇圈,则 $\chi_e(G)\leqslant\Delta(G)$。

1994年,Chen,Lih 和 Wu[4] 证明了:设 G 是一个连通图,若 $\Delta(G)\geqslant 3$ 或 $\Delta(G)\geqslant\frac{|G|}{2}$ 且图 G 不为完全图和完全二部图 $K_{2m+1,2m+1}$,则 G 是 $\Delta(G)$-均匀可染的,并进一步提出如下猜想:

猜想2[4] 不是完全图,奇圈和完全二部图 $K_{2m+1,2m+1}$ 的连通图 G 是 $\Delta(G)$-均匀可染的。

在平面图方面,Yap 和 Zhang 在文献[5]中证明了:若 G 是 $\Delta(G)\geqslant 3$ 的连通外平面图,则 G 是 $\Delta(G)$-均匀可染的。在文献[6]中证明了:若 G 是 $\Delta(G)\geqslant 13$ 的平面图,则对任意 $m\geqslant\Delta(G)$,图 G 是均匀 m-可染的。本文证明了:若图 G 是 $\Delta(G)\geqslant 6$ 且不含3,4-圈的平面图,则对任意的 $m\geqslant\Delta(G)$,图 G 是均匀 m-可染的。

1 引理

设 G 是平面图,用 F,$|F|$,r_i,$d(f)$ 分别表示图 G 的面集,面数,i-面的个数及面 f 的度数。

引理1 设 G 是阶为 n 且不含3,4-圈的平面图,则 $e(G)\leqslant\frac{5}{3}n-\frac{10}{3}$,且 $\delta(G)\leqslant 3$。

证明 显然只需证明当 G 是连通图时结论成

2010年6月9日收到
作者简介:谭 香(1976—),山东临朐人,讲师、硕士研究生,研究方向:图论及组合最优化。

立即可。首先 $r_3=r_4=0$，又由

$$5|F|=5(r_5+r_6+\cdots+r_n)\leqslant 5r_5+6r_6+\cdots+nr_n=\sum_{f\in F}d(f)=2e(G)$$ 可得，$|F|\leqslant\frac{2}{5}e(G)$。

由欧拉公式 $|G|-e(G)+|F|=2$，可知 $2\leqslant|G|-e(G)+\frac{2}{5}e(G)=|G|-\frac{3}{5}e(G)$。从而可得

$$e(G)\leqslant\frac{5}{3}|G|-\frac{10}{3}=\frac{5}{3}n-\frac{10}{3}。$$

又由 $\sum_{v\in V(G)}d(v)=2e(G)$ 及欧拉公式知 $\sum_{v\in V(G)}(d(v)-4)+\sum_{f\in F}(d(f)-4)=-8<0$，从而 $\delta(G)\leqslant 3$。

引理 2[7] 不含 3-圈的平面图是 3-可染的。

引理 3 设 m,s 均为正整数，G 是最大度 $\Delta(G)\leqslant m$ 且不含 3-圈的图。如果 G 存在一个独立 s-集 V'，且存在 $A\subseteq V(G)V'$，满足 $|A|>\frac{s(m+1)}{2}$，且对任意的点 $v\in A$ 有 $e(v,V')\geqslant 1$，则 A 中存在不相邻的两点 α,β，它们均与 V' 中的点 γ 相邻，且它们在 V' 中的邻点仅有 γ。

证明 设 $A_1=\{x|x\in A,x$ 在 V' 中仅有一个邻点$\}$，$|A_1|=r$。则 $r+2(|A|-r)\leqslant e(A,V')\leqslant ms$。因此 $r\geqslant 2|A|-ms>s$。从而可知 V' 中至少存在一点 γ，其在 A 中至少有两个邻点。又 G 不含 3-圈，因此在 A_1 中有不相邻的两点 α,β，它们在 V' 中的邻点为 γ。

引理 4[6] 设 m,t 均为正整数。H 是阶为 mt 的图，且 $\chi(H)\leqslant m$。如果 $e(H)\leqslant(m-1)t$，则 H 是均匀 m-可染的。

引理 5 设 m,t 均为正整数，且 $m\geqslant 5,t\geqslant 1$。$G$ 是阶为 mt 且不含 3-圈的平面图，且 $\Delta(G)\leqslant m$。如果 $e(H)\leqslant(2m-3)t-\max\{\Delta(G)-3,t\}$，则 H 是均匀 m-可染的。

引理 5 的证明与文献[6]中引理 5 的证明类似，在本文中省略。

定理 1 若图 G 是 $\Delta(G)\geqslant 6$ 且不含 3,4-圈的平面图，则对任意的 $m\geqslant\Delta(G)$，图 G 是均匀 m-可染的。

证明 首先假设 $|G|$ 是 m 的整数倍。不失一般性，设 $|G|=mt$。对 $e(G)$ 用数学归纳法，由引理 1，存在 $xy\in E(G)$，满足 $d(x)\leqslant 3$。由归纳假设，$G-xy$ 存在均匀 m-染色 φ，设其色类分别为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$，其中 $|V_i|=t,i=1,2,\cdots,m$。显然只需证明 x,y 在同一色类的情形。不妨设 $x,y\in V_1$，且 $N(x)\subseteq V_1\cup V_2\cup V_3$。令 $V'_1=V_1\setminus\{x\}$。

若存在 $z\in V_j(j>3)$，使得 $e(z,V'_1)=0$，则可将 z 移入 V'_1，x 移入 $V_j\setminus\{z\}$，从而可得 G 的一个均匀 m-染色。因此，不妨设对所有的 $z\in\bigcup_{j=4}^{m}V_j$，均有 $e(z,V'_1)\geqslant 1$。从而可得

$$e(\bigcup_{j=4}^{m}V_j,V'_1)\geqslant(m-3)t \tag{1}$$

假设存在 $w\in V_2$，使得 $e(w,V'_1)=0$。若存在 $z\in V_j(j>3)$，使得 $e(z,V'_2)=0$，则可将 z 移入 V'_2，w 移入 V'_1，x 移入 $V_j\setminus\{z\}$，从而可得 G 的一个均匀 m-染色。因此，不妨设对所有的 $z\in\bigcup_{j=4}^{m}V_j$，均有 $e(z,V'_2)\geqslant 1$。从而可得

$$e(\bigcup_{j=4}^{m}V_j,V'_2)\geqslant(m-3)t \tag{2}$$

情形 1 设对每个 $j=2,3$，均存在 $v_j\in V_j$，使得 $e(v_j,V'_1)=0$。

令 $A=\bigcup_{i=1}^{3}V_i$，$B=\bigcup_{j=4}^{m}V_j$，$V'_2=V_2\setminus\{v_2\}$，$V'_3=V_3\setminus\{v_3\}$。则 $|A|=3t$，$|B|=(m-3)t$。

若 $e(G[A])\leqslant 2t$，由引理 4，$G[A]$ 是均匀 3-可染的。从而 G 是均匀 m-可染的。

若否，则 $e(G[A])>2t$。又由式(1)，式(2)可得

$$e(A,B)\geqslant e(V'_1\cup V'_2\cup V'_3,\bigcup_{j=4}^{m}V_j)\geqslant 3(m-3)t。$$

从而 $e(G)\geqslant e(G[A])+e(A,B)>2t+3(m-3)t=(3m-7)t>\frac{5}{3}mt-\frac{10}{3}\geqslant e(G)$，矛盾。

情形 2 假设存在 $v_2\in V_2$，使得 $e(v_2,V'_1)=0$。且对 $\forall v\in V_3$，有 $e(v,V'_1)\geqslant 1$。

令 $V'_2=V_2\setminus\{v_2\}$。则由式(1)，式(2)可得，$e(V'_1\cup V'_2,\bigcup_{j=4}^{m}V_j)\geqslant 2(m-3)t$。

情形 2.1 假设存在 $v_3\in V_3$，使得 $e(v_3,V'_2)=0$。令 $V'_3=V_3\setminus\{v_3\}$。

若存在 $z \in V_j(j>3)$,使得 $e(z,V_3')=0$,则可将 z 移入 V_3',v_3 移入 V_2',v_2 移入 V_1',x 移入 $V_j \setminus \{z\}$,从而可得 G 的一个均匀 m-染色。因此,不妨设对所有的 $z \in \bigcup_{j=4}^{m} V_j$,均有 $e(z,V_3') \geqslant 1$。从而可得

$$e(\bigcup_{j=4}^{m} V_j, V_3') \geqslant (m-3)t \qquad (3)$$

与情形 1 证明类似,可得 G 是均匀 m-可染的。

情形 2.2 假设 $\forall v \in V_3$,有 $e(v,V_2') \geqslant 1$。

则 $e(V_1' \cup V_2', V_3) \geqslant 2t$。从而 $e(V_1' \cup V_2', \bigcup_{j=3}^{m} V_j) \geqslant 2(m-3)t+2t=(2m-4)t$。

令 $A=\bigcup_{j=3}^{m} V_j \cup \{x\}$。则

$$e(G[A]) \leqslant e(G)-e(V_1' \cup V_2', A) \leqslant \frac{5}{3}mt-\frac{10}{3}-(2m-4)t-1=(4-\frac{1}{3}m)t-\frac{13}{3}。$$

又 $|A|=(m-2)t+1>\frac{(t-1)(m+1)}{2}$,由引理 3,$A$ 中存在不相邻的两点 α,β,它们均与 V_1' 中的点 γ 相邻,且它们在 V'_1 中的邻点仅为 γ。令

$G_1=G[(V_1' \setminus \{\gamma\} \cup \{\alpha,\beta\}) \cup V_2]$,

$G_2=G[A \setminus \{\alpha,\beta\} \cup \{\gamma\}]$。

则 $|G_2|=(m-2)t$,$e(G_2) \leqslant e(G[A])+m-2 \leqslant \left(4-\frac{1}{3}m\right)t-\frac{13}{3}+m-2 \leqslant (m-3)t$。

由引理 4,G_2 是均匀 $(m-2)$-可染的。从而 G 是均匀 m-可染的。

情形 3 假设 $\forall v \in V_2 \cup V_3$,均有 $e(v,V'_1) \geqslant 1$。则 $e(V'_1, V_2 \cup V_3) \geqslant 2t$。

又由式(1)可得,$e(V'_1, \bigcup_{j=4}^{m} V_j) \geqslant (m-3)t$。

令 $A=\bigcup_{j=2}^{m} V_j \cup \{x\}$。

则 $e(V'_1, A) \geqslant (m-3)t+2t+1=(m-1)t+1$。

又 $e(V'_1 A) \leqslant m(t-1)$。因此 $(m-1)t \leqslant m(t-1)+1$。从而可得 $t \geqslant m+1$。

显然 $e(G[A]) \leqslant e(G)-e(V'_1, A) \leqslant \frac{5}{3}mt-\frac{10}{3}-(m-1)t-1=\left(\frac{2}{3}m+1\right)t-\frac{13}{3}$。

因为 $|A|=(m-1)t+1>\frac{(t-1)(m+1)}{2}$,由引理 3,$A$ 中存在不相邻的两点 α,β,它们均与 V'_1 中的点 γ 相邻,且它们在 V'_1 中的邻点仅有 γ。令

$G_1=G[(V'_1 \setminus \{\gamma\} \cup \{\alpha,\beta\})]$,

$G_2=G[A \setminus \{\alpha,\beta\} \cup \{\gamma\}]$。

则 $|G_2|=(m-1)t$,$\Delta(G_2) \leqslant m-1$,且

$$e(G_2) \leqslant e(G[A])+m-2 \leqslant \left(\frac{2}{3}m+1\right)t+m-\frac{19}{3} \leqslant [2(m-1)-3]t-\max\{\Delta(G_2)-3, t\}。$$

由引理 5,G_2 是均匀 $(m-1)$-可染的。从而 G 是均匀 m-可染的。

若 $|G|$ 不是 m 的整数倍,不失一般性,设 $|G|=m(t+1)-j, 0<j<m$。对 $|G|$ 用数学归纳法。因 G 是不含 3-圈的平面图,由引理 1,存在 $x \in V(G)$,$d(x) \leqslant 3$。由归纳假设,$G-x$ 存在均匀 m-染色 φ,设其色类分别是 $V_1, V_2, \cdots, V_m$,其中 $|V_i|=t$ 或 $|V_i|=t+1$。不妨设 $N(x) \subseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3$。若存在 $j \geqslant 4$,满足 $|V_j|=t$,则将 x 添加到 V_j,从而得 G 的一个均匀 m-染色。因此对 $\forall j \geqslant 4$,均有 $|V_j|=t+1$。从而 $|G|=m(t+1)-j, 0<j<3$。令 $G'=G \cup K_j$。由前面证明可得,G' 是均匀 m-可染的,从而 G 是均匀 m-可染的。 □

参 考 文 献

1 Bondy J A, Murty. Graph theory with applications. New York. North-Holland,1976

2 Hajnal A, Szemerédi E. Proof of conjecture of Erdós, Eds. Rényi, A. Sós V T, Combinatorial theory and its application. London. North-holland,1970: 601—603

3 Meyer M. Equitable coloring. Amer: Math Monthly,1973;80:920—922

4 Chen B L, Lih K W, Wu P L. Equitable coloring and the maximum degree. Europen J Combin, 1994;15: 443—447

5 Hap H P, Zhang Y. The equitableΔ-coloring conjecture holds for outerplanar graphs. Bull Inst Math Acad Sinca, 1997;25:,143—149

6 Zhang Y, Hap H P. Equitable colorings of planar grphs. J Combinath Combin Comput,1998;27:97—105

7 Grotzsh H. Ein drefarbensatz fur dreikreisfreie netze auf der kugel. Wiss Z Martin-luther-Univ Hall-Wittenberg, Mat-Natur Reche,1959;8:109—120

(下转第 6627 页)

参　考　文　献

1　DB11/T 478—2007 古树名木评价标准. 2007: 1—2

2　北京市人民政府. 北京城市总体规划(2004 年—2020 年). 北京城市规划, 2005;(2): 5—51

3　崔国发, 邢韶华, 赵　勃. 北京山地植物和植被保护研究. 北京: 中国林业出版社, 2008: 2

4　贺士元, 邢其华, 尹祖棠, 等. 北京植物志. 北京: 北京出版社, 1992: 1—1476

5　牛有成, 赵凤桐. 北京古树神韵. 北京: 中国林业出版社, 2008; 1—347

6　全国绿化委员会办公室. 全国古树名木保护现状与对策. 中国绿色时报, 2005—9—22 (A03)

7　陈有民. 园林树木学. 北京: 中国林业出版社, 1990: 1—750

8　吴征镒. 中国种子植物属的分布区类型. 云南植物研究, 1991 (增刊Ⅳ): 1—139

Diversity of Ancient Trees in Beijing

CHEN Xiao

(Beijing Institute of Landscape Architecture, Beijing 100102, P. R. China)

[**Abstract**]　According to survey data of ancient and famous trees of Beijing in 2007, there are 39 408 ancient trees, which belong to 66 species (including varieties, forms and cultivars) from 47 genera and 28 families in Beijing. Analytical studies are conducted on quantity, composition, geographical elements and rare, endangered, key protected, distinctive species. The results show that ancient trees of Beijing have the following characteristics: species are abundant, quantity is large; geographical elements are complex, character of temperate zone is obvious; rare and distinctive species account for a considerable proportion.

[**Key words**]　ancient trees　tree species　diversity　Beijing

(上接第 6609 页)

Equitable Coloring of Planar Graphs without 3,4-cycles

TAN Xiang

(Shandong University of Finance, Shandong, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**]　A proper vertex coloring of a graph is equitable if the sizes of its color classes differ by at most one. Using the properties of planar graphs and method of changing colors. If G is a planar graph with maximum degree $\Delta(G) \geqslant 6$ and without 3, 4-cycles, then G is equitably m-colorable for any $m \geqslant \Delta(G)$.

[**Key words**]　planar graph　equitable coloring　cycle

(上接第 6622 页)

effect of maximum inelastic displacement and the effect of cumulative hysteretic energy, fairly according with the actual inelastic behavior due to the strong ground motion. Then, some characteristics of R_D spectra are found, which are similar with the former R_μ spectra. Due to lots of time history analysis of SDOF oscillators and regression of datum, an expression of R_D spectra is constructed. Furthermore, the proposed R_D spectra are compared with R_μ spectra qualitatively. The results of this paper have the smallest values compared to other results because of two main reasons. One is the consideration of the ultimate limit state of structure and the other is the consideration of the influence of the duration of ground motions, which deserve more attention during the seismic design or estimation for the structures.

[**Key words**]　damage index　inelastic spectra　cumulative energy　ductility　duration