第10卷 第27期 2010年9月
1671—1815(2010)27-6838-05

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 27 Sep. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

金融资产收益率的多尺度统计分析

褚万霞
(西北政法大学经济管理学院,西安 710063)

摘 要 金融资产收益率是金融投资要考虑的重要因素。金融资产收益率数据样本的不确定性可以用统计模型进行描述。本文从多尺度的角度讨论和分析了金融资产收益率在小波域的统计模型和统计特性。蒙特卡罗仿真实验和分析表明了结论的有效性。

关键词 金融资产收益率 多尺度分析 统计特性
中图法分类号 F224.0; **文献标志码** A

随着我国金融体系和金融产品的发展,对于金融资产收益率的研究,已引起了越来越多的关注,其在金融资产投资决策、风险管理等方面具有重要的实践和理论研究价值。从统计学的角度来看,现实中每个具体的金融数据都可以视为是一个样本实现,具有某种随机性,这种随机性总是在和某个具体的概率密度分布总体发生联系[1,2]。如果可以确定金融资产收益率对应的样本总体,从理论上说,就掌握了相应的金融数据的全面的概率特性。在此基础之上,可以进一步实现对相应决策风险,预测置信程度的研究。高斯分布因其形式简单,用样本的一阶统计量和二阶统计量即可完全确定,因此是描述金融资产收益率的常用概率统计分布模型[3,4]。

金融资产收益率数据记录了时间域的信息,时间域数据的变化可以在对应的频率域以更直观的形式表现出来,但传统的频率域分析方法,由于要对在整个时间轴上进行积分,因此只能体现出数据在时间域的全局变化,即不具有时域上的分辨率。金融资产收益率数据除了包含有时域信息外,还包含有尺度信息。多尺度的分析方法是现代随机数据和信号处理的重要理论方法,而小波分析的方法是多尺度分析方法的重要内容。通过小波分析可以进行金融资产收益率数据的联合时频分析[5],挖掘出数据中隐含的尺度信息。本文针对金融资产收益率数据的正态分布特性,分析了该正态性在小波域不同尺度下传递后的特性,为进一步利用多尺度统计特性分析金融资产收益率数据奠定基础。

1 金融资产收益率数据的频率域表示

金融资产收益率通常是以特定时期内相邻且离散的时间段内的收益率数据进行表示的,即其是离散时间变量的函数,所以通常的情况下,可以将某一个时期内的金融资产收益率数据视为是一个离散时间序列。

对于有限长序列$\{a_n:n=0,1,\cdots,N-1\}$,令

$$A(k) \equiv \sum_{t=0}^{N-1} a_t e^{-i2\pi tk/N} \tag{1}$$

式(1)中的$A(k)$的变化与频率$\frac{k}{N}$有关,以N为周期,则可定义$\{a_t:t=0,1,\cdots,N-1\}$的傅立叶变换为

$$A(k) \equiv \sum_{t=0}^{N-1} a_t e^{-i2\pi tk/N}, k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{2}$$

相应的重构$\{a_n\}$的表达式为

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} A(k) e^{i2\pi tk/N}, t = 0,1,\cdots,N-1 \tag{3}$$

对于两个有限长时间序列$\{a_n:n=0,1,\cdots,N-1\}$和

2010年5月25日收到
作者简介:褚万霞(1969—),女,宁夏固原市人,西北政法大学经济管理学院讲师,研究方向:数量经济学。E-mail:chuwanxia@163.com。

$\{b_n : n = 0, 1, \cdots, N-1\}$，可定义圆周卷积：

$$a_t * b_t \equiv \sum_{u=0}^{N-1} a_u b_{t-u} \bmod N, t = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{4}$$

其中 mod 表示取模运算。

对于有限长序列的圆周卷积，存在以下关系

$$\sum_{u=0}^{N-1} a_t * b_t e^{-i2\pi tk/N} = A_k B_k, k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{5}$$

即两有限长序列在频率域的乘积关系对应于两序列在时间域内的圆周卷积。圆周卷积对应着圆周滤波器的传递结果。

实际的金融资产收益率数据总是局限在一定时间长度内的，因此，一般通过有限长时间序列的傅立叶变换来对其频率域特性进行分析。傅立叶分析可以提取出金融资产收益率数据中的谐波成分，从频率域的角度对数据进行分析，但由于其没有时间分辨率，不能实现对于数据的时间局域性分析。

2　基于小波变换的多尺度分析

小波变换是多尺度分析的有力工具[6,7]。可实现金融资产收益率数据在小波域各个尺度上的表示，从而实现对数据时间域上局域性的不同尺度分析。

2.1　小波变换

小波变换可视为是将一个函数空间中的向量向该空间中的一组框架基上的投影，该组框架基由小波母函数通过时移因子和尺度因子的变化平移伸缩而成。对于框架基为正交基情况下的正交小波，是从一个尺度函数的二进伸缩

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right) \tag{6}$$

张成的一个多分辨率分析导出的。对于该多分辨率分析中的相邻两个尺度函数空间中的函数向量之间的关系及相邻尺度函数空间和小波函数空间中的向量的关系，可以通过二尺度方程进行表示。

$$\phi_{j,0}(t) = \sum_n h(n) \phi_{j-1,n}(t) \tag{7}$$

$$\psi_{j,0}(t) = \sum_n g(n) \phi_{j-1,n}(t) \tag{8}$$

其中 $\phi_{j,\cdot}(\cdot)$ 为 j 尺度上的尺度函数，；$\psi_{j,\cdot}(\cdot)$ 为 j 尺度上的小波函数，$h(n) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{1}{2}\right), \phi(t-n) \rangle$，$g(n) = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{1}{2}\right), \varphi(t-n) \rangle$。

根据多分辨率分析，序列 $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$ 为一组正交基，得到频率域正交条件

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \omega \in R \tag{9}$$

滤波器系数 $h(n)$，$g(n)$ 及其傅立叶变换 $H(\omega)$、$G(\omega)$ 的一系列性质[6,7]。

3.2　小波变换的矩阵表示

正交小波变换是一个线性有界变换[7]。因此，可以用表示线性有界算子运算的常数矩阵变换对其进行等价表示。设该常数矩阵为 w，则小波变换可表示为以下矩阵形式

$$W = wX \tag{10}$$

式(10)中 W 和 X 均为 $N \times 1$ 向量，$X = \{x_t : t = 0, 1, \cdots, N-1\}$ 为待处理时间序列，$Y = \{y_t : t = 0, 1, \cdots, N-1\}$ 为小波变换系数，$N = 2^j$，j 为尺度。

w 为 $N \times N$ 方阵，且有 $w^T w = I$，即 w 为规范正交阵。所以变换具有保范性，即

$$\| W \|^2 = \| X \|^2 = \sum_{j=1}^{J} \| W_j \|^2 + \| V_J \|^2 \tag{11}$$

因此，离散时间序列的能量以小波系数平方 $\{W_n^2\}$ 的形式进行了重新分布。

3.3　正交小波的工程实现

式(7)和式(8)只给出了尺度函数、小波函数和相应滤波器之间的关系，要工程实现正交小波的快速算法，如找到待处理离散时间序列与滤波器的相互关系，则可实现离散时间序列正交小波变换的快速工程算法。

由式(7)和式(8)可导出相邻尺度系数及相邻尺度系数和小波系数的关系

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p] a_j[p] \tag{12}$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p] a_j[p] \tag{13}$$

若在零尺度上认为 $\phi(t)$ 的支撑长度足够短,则可将其认为是一个 δ 函数,可以得到:

$$a_0 \approx x_n \tag{14}$$

即可以将零尺度上的尺度系数 $a_0[n]$ 用采样序列 x_n 近似表示。

所以式(12)和式(13)所表示的递推过程的起始项可以由离散时间序列实现,得到离散时间序列正交小波变换的快速工程算法。

4 金融资产收益率数据的小波域特性

正态分布是常用的对金融收益率数据进行描述的统计模型。在此假设条件下,如果使用 Daubechies 小波对金融收益率数据进行分析,可以得到一些很有用的结论。

对于金融收益率数据中的样本方差可以做以下分解

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N}\| X \|^2 - \bar{X} = \frac{1}{N}\| W \|^2 - \bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{J} \| W_j \|^2 \tag{15}$$

其中 $\bar{X}$ 是样本均值。$\frac{1}{N}\| W_j \|^2$ 可以视为 j 尺度上小波系数对样本方差所做的贡献。若信号未分解到底,只是分解到第 J_0 尺度,则有:

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N}\| X \|^2 - \bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{J_0} \| W_j \|^2 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{J_0} \| V_{j0} \|^2 - \bar{X} \tag{16}$$

式(15)和式(16)表明数据样本中的方差能量在小波域的各个系数上作了重新分配,小波变换前后的总能量保持不变。

如果将金融资产收益率数据 $\{x_n\}$ 视为一个各态历经随机过程的样本,并假设其联合分布服从多元高斯分布

$$p(X) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\Sigma|^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(X-EX)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(X-EX)\right] \tag{17}$$

其中 $X = [X_1, X_2, \cdots, X_N]$,$\Sigma = (X-EX)(X-EX)^{\mathrm{T}}$ 是 x 的协方差矩阵。则变量 x_n 的边缘分布为:

$$p(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma_n}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-m_n)^2\right] \tag{18}$$

数据在小波域上的概率密度特性可以用下式表示

$$p(d_1[p]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p] p(x_n) \tag{19}$$

$$p(d_j[p_j]) = \sum_{p_{j-1}=-\infty}^{+\infty} (h[p_{j-1} - 2p_j] \times (\cdots \sum_{p_1=-\infty}^{+\infty} (h[p_1 - 2p_2] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p_1] p(x_n)))) \tag{20}$$

在 $\{h_n\}$ 为有限长的情况下,$p(d_j[p_j])$ 为正态分布函数的线性组合,因此其仍为正态分布。若原始的金融资产收益率数据是一个各态历经随机过程平稳随机过程 $\{x_n\}$ 的样本,且均值为零,则有:

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_N = 0 \tag{21}$$

故任一尺度上任一点的均值 $m_{j,n}$ 为

$$m_{j,n} = 0 \tag{22}$$

若平稳随机过程 $\{x_n\}$ 的方差为 σ^2,由正交小波滤波器性质可以得到任一尺度上任一点的方差 $\sigma_{j,n}^2$ 为

$$\sigma_{j,n}^2 = \sigma^2 \tag{23}$$

式(20)、式(22)和式(23)给出了金融资产收益率各态历经正态分布假设下,其在各个尺度上投影后的概率密度分布特性。

5 实验仿真

可以进行蒙特卡罗仿真验证以上结论的有效性。利用来自于标准正态分布的粒子点模拟金融资产收益率数据,然后将这些粒子点数据在各个尺度上进行投影分解。

图 1(a)是在 10 000 个粒子点的情况下得到的

原始数据的直方图,直方图的步进间隔是 0.05。图 1(b)、1(c)、1(d)是对这些粒子点使用 db4 小波进行分解的条件下,分别在第 1、2、3 尺度上进行投影后得到直方图。

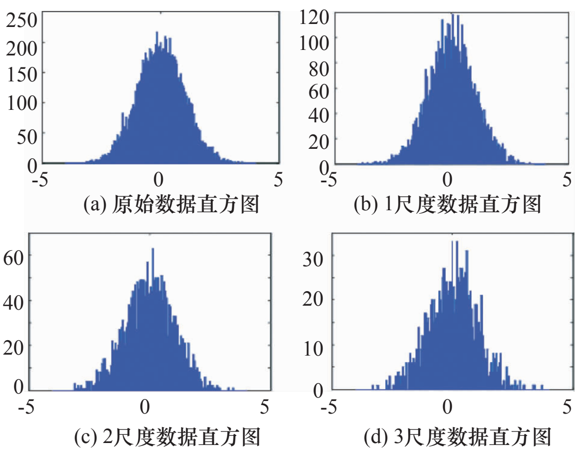

图 1　金融资产收益率正态分布 db1 小波多尺度蒙特卡罗模拟

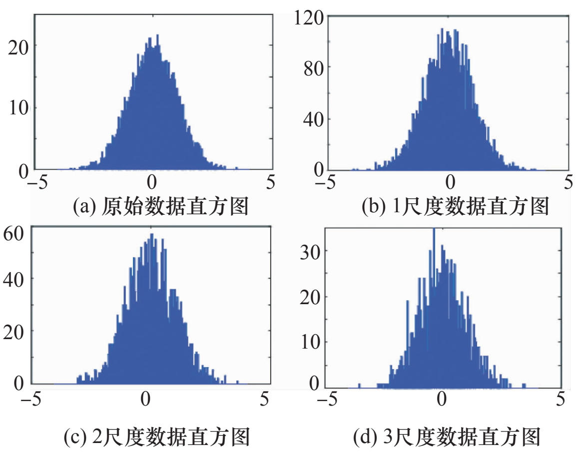

图 2　金融资产收益率正态分布 db4 小波多尺度蒙特卡罗模拟

从图 1 和图 2 中可以看出,正态分布的金融资产收益率原始模拟数据通过正交小波变换投影到小波多尺度空间后,其在各个尺度上仍然基本保持正态分布的形态,且其均值和方差基本稳定,印证了正态分布总体在各尺度上的统计特性的稳定性。

6　结论

金融资产收益率具有某种随机性,这种随机性可以使用概率密度分布进行描述,不同的概率密度分布其在多尺度条件下的各个尺度上的特性变化也不相同。对于正态分布的总体,其在正交小波变换条件下在各个尺度上保持稳定。应用这一结论对数据进行处理可以挖掘数据中的尺度信息,扩展数据信息量。在实际应用中,可结合实际处理任务和对象将该思路应用于多方面。如可联合使用各个尺度上的统计分布,构造多尺度的检验函数,进行多尺度条件下的金融投资风险控制等。

参　考　文　献

1　Mantegna R, Stanley H. Scaling behavior in the dynamics of an economic index. Nature, 1995; (376): 46—49
2　张明恒,程乾生. 金融资产收益分布的混合高斯分析. 数学的实践与认识, 2002;(3): 416—421
3　曹志广, 王安兴, 杨军敏. 股票收益率非正态性的蒙特卡罗模拟实验. 财经研究, 2005;31(10): 34—41
4　史建平. 基于小波分析的汇率波动序列研究. 西安:西安电子科技大学硕士论文, 2007; 29—36
5　黄秀海. 上证综指非对称的成分 ARCH 效应分析. 浙江统计, 2007; (4): 14—16
6　王大凯,彭进业. 小波分析及其在信号处理中的应用. 北京: 电子工业出版社, 2006: 30—75
7　Mallat S. A. Wavelet Tour of Signal Processing 2nd edition. San Diego: Academic Press, 1999: 67—314

(下转第 6856 页)

参 考 文 献

1 李 松．当前保险公司理赔环节面临的主要风险及其应对措施．国际商报，2009；(06)：64—67
2 贾飒飒，廖 江．基于风险分析的工程保险费率厘定研究．山西建筑，2008；34(33)：270—271
3 王发廷．基于风险评估的大型调水工程保险费率的确定．杭州：浙江大学，2003
4 胡 昊，张英隆．建造工程一切险的分类费率模型应用研究．科技进步与对策，2008；25(10)：71—73
5 王 和．工程保险理论与实务．北京：中国金融出版社，2006：17—21

Research on the Method of Calculating the Insurance Rate of the Large-scale Project

YANG Peng, YANG Bao-lan[1]*, FENG Lei, YANG Yi, WANG Gong-liang

(Chine of Shore Oil Engineering Co. Ltd., Tranjing 300450, P. R. China; School of Management, Tianjin University of Technology[1], Tianjin 300384, P. R. China)

[**Abstract**] Aiming at the difficult problems of calculating the insurance rate of the large-scale project which exist in the insurance field, a viewpoint is proposed that puts the risk of adjustment stage ahead and determines the premium reasonably at the insurance stage to avoid the problems which happen at the adjustment stage; and also a new method is proposed to calculate the engineering insurance premium rate. Combined with the construction cost, the method determines the rate adjustment coefficient based on engineering's basic rates and according to the particularity of the project, and then calculates the reasonable premium. At last, the feasibility of this method with an example is verified.

[**Key words**] large-scale projects rate-making adjustment

(上接第 6841 页)

Multiscale Statistical Analysis for Rate of Financial Asset

CHU Wan-xia

(Economic and Management School, Northwestern Politics University, Xi'an 710063, P. R. China)

[**Abstract**] Rate of return on financial asset (RRFA) is an important factor that must be considering in financial investment. RRFA data can be characterized by a corresponding statistics model. Our paper discusses and analyzes the statistics model and relevant statistical characteristics. Monte Carlo simulation and corresponding analysis verify the results.

[**Key words**] rate of return on financial asset multiscale analysis statistical characteristic