第 10 卷 第 21 期 2010 年 7 月
1671-1815(2010)21-5213-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 21 July 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

Banach 空间中二阶三点系统边值问题正解的存在性

王海平 路海燕 路慧芹
(山东师范大学数学科学学院,济南 250014)

摘 要 本文研究了 Banach 空间中二阶三点系统边值正解问题,利用 Darbo 不动点定理,在非线性项 $f(t,v(t))$ 关于 y 满足次线性,$g(t,u(t))$ 关于 u 满足次线性条件的情况下,得到了一个正解存在性的结果。

关键词 系统 不动点 非紧性测度 正解

中图法分类号 O175.8; **文献标志码** A

关于二阶系统边值问题解的研究,在文献[1—3]中已有丰富的研究,但都是在两点边界条件下研究的,文献[1]研究了 Banach 空间二阶两点系统的正解。但在 Banach 空间中二阶三点方程组的研究还很少。故本文将边界条件扩展为 $u(0)=\beta u(\eta)$,$u(T)=\alpha u(\eta)$,$v(0)=\beta v(\eta)$,$v(T)=\alpha v(\eta)$,研究了 Banach 空间二阶三点系统边值问题:

$$\begin{cases} u''+f(t,v(t))=0,\ t\in[0,T] \\ v''+g(t,u(t))=0,\ t\in[0,T] \\ u(0)=\beta u(\eta), \quad u(T)=\alpha u(\eta) \\ v(0)=\beta v(\eta), \quad v(T)=\alpha v(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性。设 $(E,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间,P 为 E 中的锥,E 中的半序"$\leqslant$"由锥导出。$C[J,P]=\{u\in C[J,E]:u(t)\geqslant 0,t\in J=[0,T]\}$ 为 E 中的锥。由锥 $C[J,P]$ 引入 $C[J,E]$ 中的半序:$x\leqslant y\Leftrightarrow\forall t\in J,x(t)\leqslant y(t)$。本文 E, $C[J,E]$ 中有界集的非紧性测度分别用 $\alpha(\cdot)$,$\alpha_c(\cdot)$ 表示,元素的范数分别用 $\|\cdot\|$,$\|\cdot\|_c$ 表示,其中 $\|\cdot\|_c=\max_{t\in J}\|\cdot\|$。

为了后面的应用,先列出下列引理:

引理 1[4] 设 $M\in C[J,E]$ 等度连续的有界集,则 $\alpha_c(M)=\alpha_c(M(J))=\max_{t\in J}\|\alpha(M(t))\|$,其中 $M(J)=\{x(t):x\in M,t\in J\}$。

引理 2[4] 若 $H\in C[J,E]$ 为等度连续的有界集,则 $\alpha(H(t))$ 在 J 上连续,且

$$\alpha\left(\int_J x(t)\,\mathrm{d}t:x\in H\right)\leqslant\int_J\alpha(H(t))\,\mathrm{d}t。$$

引理 3[4] (Ascoli-Arzela) $H\in C[J,E]$ 是相对紧的充要条件 H 是等度连续,$\forall t\in J$,$H(t)$ 在 E 中相对紧。

引理 4[4] (Darbo)设 D 是 E 中有界凸闭集,若算子 $A:D\to D$ 严格集压缩,则 A 在 D 中必存在不动点。

本文在 $C^2[J,E]$ 中研究系统式(1),若 $u,v\in C^2[J,E]$,$u(t),v(t)\geqslant 0$,$\forall t\in J$,且 u,v 不恒为 0,则称满足于系统式(1)的 u,v 为系统式(1)正解。

为了下文的方便,引入两个记号及条件:

$$G_0=\frac{T^2(1+\beta+2\alpha)}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)},\gamma=\min\left\{\frac{(T-\eta)\alpha}{T-\alpha\eta},\frac{(T-\eta)\beta}{T-\alpha\eta},\frac{\beta\eta}{T},\frac{\alpha\eta}{T}\right\}。$$

$(u,v)\in C^2[J,E]\times C^2[J,E]$ 是系统式(1)的正解当且仅当 $(u,v)\in C[J,P]\times C[J,P]$ 是下列方程组的解

$$\begin{cases} u(t)=\int_0^T G(t,s)f(s,v(s))\,\mathrm{d}s \\ v(t)=\int_0^T G(t,s)g(s,u(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2}$$

2010 年 5 月 6 日收到 山东省高等学校科技计划项目(J09LA08)资助
第一作者简介:王海平(1986—),河北省邢台市人,硕士研究生,基础数学非线性微分方程。

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(\beta-\alpha)t-\beta T}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)}(\eta-s) + \\ \quad \frac{(1-\beta)t+\beta\eta}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)}(T-s)+s-t; \\ \quad s \leqslant \eta, 0 \leqslant s \leqslant t \\ \frac{(\beta-\alpha)t-\beta T}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)}(\eta-s) + \\ \quad \frac{(1-\beta)t+\beta\eta}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)}(T-s); \\ \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \eta \\ \frac{(1-\beta)t+\beta\eta}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)}(T-s)+s-t; \\ \quad \eta \leqslant s \leqslant t \\ \frac{(1-\beta)t+\beta\eta}{T-\alpha\eta-\beta(T-\eta)}(T-s); 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \quad s \geqslant \eta。 \end{cases}$$

令

$$Au(t) = \int_0^T G(t,s) f(t, \int_0^T G(t,s) g(s,u(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s \tag{3}$$

则系统式(1)的解即 为 A 在 $C[J,P]$ 中的不动点。

1 主要结果及证明

(H_1) 对任一有界集 $B \subset E$,存在常数 $l_1>0, l_2>0$ 且 $l_1 l_2 \leqslant \frac{1}{2G_0^2T^2}$,使得下列两式成立:$\alpha(f(t,B)) \leqslant l_1\alpha(B), \alpha(G(t,B)) \leqslant l_2\alpha(B), \forall t \in J$.

(H_2) 当 $u \in P$ 时,$\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{\|g(t,u)\|}{\|u\|} = 0$ 关于 $t \in J$ 一致成立;当 $v \in P$ 时,$\lim\limits_{\|v\|\to\infty} \frac{\|f(t,v)\|}{\|v\|} = 0$,关于 $t \in J$ 一致成立。

定理 1 (H_1)、(H_2)成立,则系统(1)存在正解。

为证明此结论先证出几个引理:

引理 5 若 $0 \leqslant \alpha < \frac{T}{\eta}, 0 \leqslant \beta < \frac{T-\alpha\eta}{T-\eta}$ 有 $\gamma G(s,s) \leqslant G(t,s) \leqslant G_0$。

由 $G(t,s)$ 的定义易证,故省略证明。

引理 6 设 (H_1) 成立,则 $A: C[J,P] \to C[J,P]$ 严格集压缩算子。

证明 $A: C[J,P] \to C[J,P]$ 显然。设 $u \subset C[J,P]$,$\{u_n\} \subset C[J,P]$,且 $u_n \to u$,则 $\exists r>0$,s. t. $\|u_n\|_c \leqslant r, \|u\|_c \leqslant r, \forall t \in J$,令 $v_n(t) = \int_0^T G(t,s)g(t,u_n(s))\mathrm{d}s$,则有

$$\|Au_n(t) - Au(t)\| = \|\int_0^T G(t,s)[f(t,v_n(s)) - f(t,u(s))]\mathrm{d}s\| \leqslant \int_0^T G(t,s)\|f(t,v_n(s)) - f(t,u(s))\|\mathrm{d}s。$$

$$v_n(t) - v(t) \leqslant \int_0^T G(t,s)\|g(t,u_n(s)) - g(t,u(s))\|\mathrm{d}s$$

有 $g(t,s)$ 连续,且 $\|g(t,u_n) - g(t,u)\| \leqslant 2M_r$,其中 $M_r =: \sup\{\|g(t,u)\| : \|u\| \leqslant r, \forall t \in J\}$,所以有 lebesgue 控制收敛定理得 $\|v_n(t) - v(t)\| \to 0$ 即 $\{v_n(t)\}$ 在 E 上收敛。由 $G(t,s)$ 在 $J \times J$ 一致连续性易证得 $\{v_n\}$ 在 J 上等度连续。由引理 3 得证 $\{v_n\} \subset C[J,P]$ 相对紧,仿照文献[4]可断言 $\|v_n - v\|_c \to 0$,$n \to \infty$。同理可证 $\{Av_n\}$ 在 $C[J,P]$ 相对紧,$\|Au_n - Au\|_c \to 0$,$n \to \infty$,故 A 连续。A 有界显然。对任一有界 $B \subset E$,则有

$$\alpha(A(B)(t)) = \alpha(\int_0^T G(t,s)f(s,\int_0^T G(s,\tau)g(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s : u \in B) \leqslant G_0\alpha(\int_0^T f(s, \int_0^T G(s,\tau)g(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s : u \in B) \leqslant G_0T\alpha(f(s,\int_0^T G(s,\tau)g(\tau,u(\tau))\mathrm{d}\tau) : u \in B) \leqslant G_0Tl_1\alpha(\int_0^T G(s,\tau)g(\tau, u(\tau))\mathrm{d}\tau : u \in B) \leqslant G_0^2T^2l_1l_2\alpha(B(t))。$$

$\therefore\ \alpha_c(A(B)) \leqslant 2G_0^2T^2l_1l_2\alpha_c(B) \leqslant \alpha_c(B)$。得证。

定理 1 证明 由(H_2)知:取 $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2G_0T}$,$\exists r_1$, s. t. $\forall t \in J$,当 $u \in P$,且 $\|u\| \geqslant r_1$,有 $\|g(t,u)\| \leqslant \varepsilon_1\|u\|$ 成立。取 $0 < \varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{2G_0T}$,$\exists r_2$, s. t. $\forall t \in J$,当 $v \in P$,且 $\|v\| \geqslant r_2$ 时,有 $\|f(t,u)\| \leqslant \varepsilon_2\|v\|$ 成立,又因为 $\|g(t,u)\| \leqslant$

$M_{r_1} =:\sup\{\|g(t,u)\|:\|u\|\leqslant r_1, t\in J\}$，$\|f(t,v)\|\leqslant M_{r_2} =:\sup\{\|g(t,u)\|:\|v\|\leqslant r_2, t\in J\}$，所以 $\forall t\in J, u\in P, v\in P$，有 $\|g(t,u)\|\leqslant \varepsilon_1\|u\| + M_{r_1}$，$\|f(t,v)\|\leqslant \varepsilon_2\|v\| + M_{r_2}$。对 $\forall u\in C[J,P], t\in J$ 有 $\|v(t)\|\leqslant \left\|\int_0^T G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s\right\| \leqslant \int_0^T G(t,s)\|g(s,u(s))\|\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon_1 G_0 T\|u\|_c + G_0TM_{r_1} \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_c + G_0TM_{r_1}$。

$\therefore \|v\|_c = \max_{t\in J}\|v(t)\| \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_c + G_0TM_{r_1}$ 同理有

$$\begin{aligned}\|Au(t)\| &\leqslant \left\|\int_0^T G(t,s)f(s,v(s))\mathrm{d}s\right\| \leqslant \times\int_0^T G(t,s)\|f(s,v(s))\|\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon_2 G_0T\|v\|_c + \\ &G_0TM_{r_2} \leqslant \frac{1}{2}\|v\|_c + G_0TM_{r_2} \leqslant \\ &\frac{1}{4}\|u\|_c + \frac{1}{2}G_0TM_{r_1} + G_0TM_{r_2}。\end{aligned}$$

取 $R\geqslant \frac{2}{3}G_0TM_{r_1} + \frac{4}{3}G_0TM_{r_2}$，则有下式成立 $\|Au\|_c = \max_{t\in J}\|Au(t)\| \leqslant \frac{1}{4}\|u\|_c + \frac{1}{2}G_0TM_{r_1} + G_0TM_{r_2} \leqslant R$。令 $D=\{u\in C[J,P], \|u\|_c\leqslant R\}$，则 D 是 $C[J,P]$ 中有界凸闭集，且 $A: D\to D$。所以由引理 5 得证，A 在 D 中必存在不动点 u^*，满足 $u^*\in C[J,P]$，且 $\|u^*\|\leqslant R$，令 $v^* = \int_0^T G(t,s)g(s,u^*(s))\mathrm{d}s$，则 (u^*, v^*) 是系统 (1) 的正解。得证。

参 考 文 献

1　袁艳艳，刘衍胜. Banach 空间中一类二阶非线性积分微分方程组两点边值问题正解的存在性. 科学技术与工程，2005；5（12）：758—761

2　Zhou Youming, Xu Yan. Positive solutions of three-point boundary value problems for systems of nonlinear second order ordinary differential equations, J Math Anal Appl, 2006; 320: 578—590

3　崔玉军，孙经先. 二阶常微分方程三点边值问题的可解性. 山东大学学报，2005；6（40）：67—70

4　Guo Dajun, Lakshmikantham V, Liu Xinzhi. Nonlinear intergral equations in abstract spaces. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996

The Existence of Positive Solutions for Second Order Differential Systems with Three-point Boundary Problem in Banach Space

WANG Hai-ping, LU Hai-yan, LU Hui-qin

(Institute of Science of Mathematices, Shandong Normal University, Jinan 250014, P. R. China)

[**Abstract**]　The existence of positive solutions of second order differential systems with three-point boundary value problems in Banach space is investigated. By employing Darbo's fixed-point theorem, a new existence result are given under the case of nonlinearity $f(t,v(t))$ is sublinear in v and $g(t,u(t))$ is sublinear in u.

[**Key words**]　systems　fixed point theorem　noncompactness measure　positive solution