第10卷 第19期 2010年7月
1671-1815(2010)19-4730-02

科 学 技 术 与 工 程
Scie nce Technology and Engineering

Vol. 10 No. 19 July 2010
ⓒ 2010 Sci. Tech. Engng.

关于乘积函数的导函数的一个注记

何力争

（西安航空职业技术学院，西安 710089）

摘 要 基于求乘积函数的导函数所出现的“漏点”现象，讨论了在不满足求导法则条件时乘积函数的可导性问题，给出了关于此问题的判定定理，并证明了对于二元函数的乘积函数的可微性也有一个有趣的相似结论。

关键词 乘积函数 可导 导函数 可微

中图法分类号 O172.1； **文献标志码** A

1 问题的提出

对于求乘积函数的导函数这个传统而古典的数学问题，强调的是，在满足求导法则条件时其导函数的求法[1—3]，而对于不满足求导法则条件时乘积函数的可导性问题并未论述。事实上，在某点不满足求导法则的条件时，乘积函数也会出现可导的情形[4]，从而在求乘积函数的导函数时经常会出现一种错误的结论，即“漏点”现象。

例如 已知 $u(x)=\exp\sqrt[3]{x^2}$，$v(x)=\ln(1+x)$，$f(x)=u(x)v(x)=\exp\sqrt[3]{x^2}\ln(1+x)$。

求 $f'(x)$ 错误结论：

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=\frac{2\exp\sqrt[3]{x^2}\ln(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{\exp\sqrt[3]{x^2}}{1+x}。$$

原因分析：由于 $u(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，用乘积函数求导法，仅是 $x\neq0$ 时的导函数。而在 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\exp\sqrt[3]{x^2}\ln(1+x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\exp\sqrt[3]{x^2}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1。$$

即 $f(x)=u(x)v(x)=\exp\sqrt[3]{x^2}\ln(1+x)$ 也是可导的，所以，漏掉了 $x=0$ 处的导数，称其为“漏点”现象。

正确结论：

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\exp\sqrt[3]{x^2}\ln(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\exp\sqrt[3]{x^2}}{1+x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}。$$

基于上述问题，本文给出乘积函数在某点不满足求导法则时，其可导性的判定定理，并证明了对二元函数的乘积函数可微性也有一个有趣的相似结论。

2 结论及证明

定理1 设 $u(x)$ 在点 x_0 连续，$v(x)$ 在点 x_0 可导，且 $v(x_0)=0$，则 $u(x)v(x)$ 在点 x_0 可导。

证明 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}=$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}u(x)=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}u(x)=u(x_0)v'(x_0)。$$

即，$u(x)v(x)$ 在点 x_0 可导。

推论：设 $u(x)$ 在点 x_0 连续，$(u(x_0)\neq0)$，$v(x)$ 在点 x_0 可导，且 $v(x_0)=0$，则 $\dfrac{v(x)}{u(x)}$ 在点 x_0 可导。

2010年4月19日收到

作者简介：何力争(1959—)，男，副教授。研究方向：基础数学理论。E-mail：hlz102xihang@163.com。

证明 由于$u(x)$在点x_0连续,并且$u(x_0)\neq 0$,从而$\frac{1}{u(x)}$在点x_0连续,由定理知,$\frac{v(x)}{u(x)}$在点x_0可导。

定理2 设$u(x,y)$在(x_0,y_0)点连续,$v(x,y)$在(x_0,y_0)点可微,且$v(x_0,y_0)=0$,则$u(x,y)v(x,y)$在(x_0,y_0)点可微。

证明 记$A=u(x_0,y_0)$,$B=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$,

$$C=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),d(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}。$$

令$\varepsilon_1(x,y)=u(x,y)-A$,$\varepsilon_2(x,y)=\frac{v(x,y)-B(x-x_0)-C(y-y_0)}{d(x,y)}$,即$u(x,y)=A+\varepsilon_1(x,y)$,$v(x,y)=B(x-x_0)+C(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)d(x,y)$,则由题意,当$x\to x_0$,$y\to y_0$时,$\varepsilon_1(x,y)\to 0$,$\varepsilon_2(x,y)\to 0$。

所以$u(x,y)v(x,y)=[A+\varepsilon_1(x,y)][B(x-x_0)+C(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)d(x,y)]=AB(x-x_0)+AC(y-y_0)+\varepsilon_1(x,y)[B(x-x_0)+C(y-y_0)+\varepsilon_2(x,y)d(x,y)]+A\varepsilon_2(x,y)d(x,y)$。

其中$\frac{\varepsilon_1(x,y)\varepsilon_2(x,y)d(x,y)}{d(x,y)}\to 0(x\to x_0,y\to y_0)$;

$\frac{A\varepsilon_2(x,y)d(x,y)}{d(x,y)}\to 0\ (x\to x_0,y\to y_0)$;

$\left|\frac{\varepsilon_1(x,y)[B(x-x_0)+C(y-y_0)]}{d(x,y)}\right|\leqslant$
$|\varepsilon_1(x,y)|(|B|+|C|)\to 0\quad(x\to x_0,y\to y_0)$。

则$u(x,y)v(x,y)=AB(x-x_0)+AC(y-y_0)+o[d(x,y)]$。

故$u(x,y)v(x,y)$在(x_0,y_0)点可微。

参 考 文 献

1 同济大学数学教研室.高等数学(第四版).北京 高等教育出版社,1996

2 华东师范大学数学系.数学分析(第二版).北京 高等教育出版社,1991

3 何力争,李喜罕. 高等数学.西安西北工业大学出版社,2009

4 陈 玉. 函数可导性的几点注记.高等数学研究,2006;9(5):13—14

A Note about the Derivative Function of Product Function

HE Li-zheng

(Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Xi'an 710089, P. R. China)

[**Abstract**] based on the ‘miss point’ phenomenon while seeking the derivative function of product function, the derivability of product function is discussed while the function doesn't satisfied the conditions of derivation rule, brings out the criterion theorem of this problem, and proved that there is a similar interesting conclusion on the differentiability of the product function of binary function.

[**Key words**] product function derivative function derivable differentiable