第 10 卷　第 19 期　2010 年 7 月
1671-1815(2010)19-4748-04

科　学　技　术　与　工　程
Scie nce Technology and Engineering

Vol. 10　No. 19　July 2010
ⓒ　2010　Sci. Tech. Engng.

物理学

相对论直线电子注与慢波相互作用系统的色散关系的研究

付承志
(荆楚理工学院数理学院,荆门 448000)

摘　要　研究了相对论直线电子注与介质中的慢波相互作用系统的色散关系。研究表明当电子注的速度超过介质中电磁波的相速度时有不稳定性产生。通过冷流体近似的办法,在小信号极限下得到了色散关系的方程式增长率以及空间增长率的解析表达式。这种特有的色散关系的研究对研制一种新型的微波致密大功率输出器件具有一定的理论指导意义。

关键词　色散关系　相对论直线电子注　增长率
中图法分类号　O436.3;　　**文献标志码**　A

电子注的一个基本应用就是产生相干电磁辐射。许多年前科学界就已经对电磁波谱的微波(频率从 300 MHz 到 300 GHz)段源的辐射做了研究。然而只是最近几十年来对微波源的功率和工作频率的研究有了巨大的进展,这主要归功于相对论高频电子学这个新的物理学科的进展[1—5]。“相对论”这个词首先是指所使用的高压电子注的速度接近光速且其电流密度可以非常大,其次是指这些微波源的表现依赖于狭义相对论效应。微波辐射研究的进步主要依赖如下三个方面的进展[6—8]:更高的电压和电流与传统的微波器件如速调管、磁控管的结合;依赖高电流密度器件(虚阴极振荡器)的进展;直接利用相对论效应新的快波器件(比如回旋管、自由电子激光器)的研究,这些器件与传统器件不一样,它们在更短的波长处达到更高的功率[9,10]。

1　色散关系

假设各向同性、均匀、无界的非磁性介质的介电常数为 ε,再在该介质中施加一均匀、恒定的磁场 $\vec{B}_0$,并且该磁场沿着 z-轴方向。再假设有一均匀无界的电子注,其电子速度都是 $\vec{v}_0$,沿着磁场 $\vec{B}_0$ 方向传播;这里,电子注浓度不是很大,并且电子注的电荷被背景离子所中和。下面从电子的运动方程出发,用冷流体近似法设电子的运动以及电磁场有一个小的扰动来研究色散关系。

单个电子在静磁场 $\vec{B}_0$ 以及一平面电磁波中的运动方程可以写为

$$\frac{\mathrm{d}m_0\gamma\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e[\vec{E} + \vec{v} \times (\vec{B}_0 + \vec{B})] \tag{1}$$

式(1)中 m_0 是电子的静止质量,$-e$ 是电子的电量,$\vec{v}$ 是电子速度,$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 是相对论因子,c 是真空中的光速。$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 分别是电磁波的电场和磁场分量,假设电磁波是平面波,并且沿着 $\vec{B}_0$ 传播,按照 Faraday 定律,则 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 有关系如式(2)。

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

假设初始没有外加电磁波,即 $\vec{E} = 0$,然后给电子速度以及电磁波分别给一个小的扰动项 $\vec{v'}$,$\vec{E'}$ 即 $\vec{B}'$,并且有 $|\vec{v}'| << |\vec{v}_0|$,这样电子注电子速度可以写为

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v'} \tag{3}$$

2010 年 4 月 14 日收到
作者简介:付承志。Email: foxfu383@163.com。

而相对论因子的表达式为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

联合方程式(3)与式(4),得到电子速度有扰动后相对论因子的增量 $\Delta\gamma$ 可以写为

$$\Delta\gamma = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[-\frac{\Delta(\vec{v}\vec{v})}{c^2}\right] = \frac{\gamma_0^3}{c^2}(\vec{v}_0\vec{v}') \tag{5}$$

式(5)中,$\gamma_0 = \left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$是未扰动电子的相对论因子。这样,电子动量的增量可以写为:

$$\Delta\vec{p} = m_0(\Delta\gamma)\vec{v} + m_0\gamma\Delta\vec{v} = m_0\gamma_0\vec{v}' + m_0\frac{\gamma_0^3}{c^2}(\vec{v}_0\vec{v}') \tag{6}$$

再考虑到算符关系式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0\nabla \tag{7}$$

联合上述方程,再假设所有扰动量按 $\exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t)$的形式变化,这里 k 与 ω 分别是扰动电磁波的波数与角频率,i 是虚数单位。这样,电子在扰动后的运动方程的最终形式为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0\nabla\right)\left[m_0\gamma_0\vec{v}' + \frac{m_0\gamma_0^3(\vec{v}_0\vec{v}')}{c^2}\vec{v}_0\right] = -e[\vec{E}' + (\vec{v}'\times\vec{B}_0 + \vec{v}_0\times\vec{B}')] \tag{8}$$

按照方程(2),考虑到扰动电磁波 $\vec{E}'$与 $\vec{B}'$的如上假设,我们得到关系式:

$$\vec{B}' = \frac{k}{\omega}\vec{e}_z\times\vec{E}' \tag{9}$$

式(9)中 $\vec{e}_z$ 表示沿着 z－轴方向的单位矢量。联合方程式(8)与式(9),我们把方程式(8)写成分量形式如下:

$$v'_x - \frac{\mathrm{i}\Omega_0}{\omega - kv_0}\cdot v'_y = -\frac{\mathrm{i}e}{m_0\gamma_0\omega}\cdot E'_x \tag{10}$$

$$v'_y + \frac{\mathrm{i}\Omega_0}{\omega - kv_0}\cdot v'_x = -\frac{\mathrm{i}e}{m_0\gamma_0\omega}\cdot E'_y \tag{11}$$

$$\gamma_0^2 v'_z = -\frac{\mathrm{i}e}{m_0\gamma_0\omega}\cdot E'_z \tag{12}$$

这里,v'_x,v'_y,v'_z,E'_x,E'_y,及 E'_z 分别是扰动速度$\overrightarrow{v'}$与扰动电场$\overrightarrow{E'}$沿着 x－轴、y－轴,以及 z－轴的三个分量;$\Omega_0 = \frac{eB_0}{m_0\gamma_0}$是电子的相对论回旋频率。由上述方程式(10)－式(11),可以把扰动速度 v'_x,v'_y,及 v'_z 通过扰动电场 E'_x,E'_y,及 E'_z 表示成如下形式:

$$v'_x = -\frac{\mathrm{i}e(\omega - kv_0)}{m_0\gamma_0\omega}\,\frac{(\omega - kv_0)E'_x + \mathrm{i}\Omega_0 E'_y}{(\omega - kv_0)^2 - \Omega_0^2} \tag{13}$$

$$v'_y = \frac{\mathrm{i}e(\omega - kv_0)}{m_0\gamma_0\omega}\,\frac{\mathrm{i}\Omega_0 E'_x - (\omega - kv_0)E'_y}{(\omega - kv_0)^2 - \Omega_0^2} \tag{14}$$

$$v'_z = \frac{-\mathrm{i}eE'_z}{m_0\gamma_0^3(\omega - kv_0)} \tag{15}$$

另外,由电流的连续性方程,则扰动电子注电流与扰动电子注密度有如下关系成立:

$$\nabla\vec{J}' + \frac{\partial}{\partial t}\rho' = 0 \tag{16}$$

这里,$\vec{J}' = -e(n_0\vec{v}' + n'\vec{v}_0)$是扰动电子注电流密度,$\rho' = -n'e$ 是扰动电子注密度,n_0 与 n'分别是初始电子注密度与扰动电子注密度。这样,可以把扰动电子注密度表示成扰动速度的函数如式(17)。

$$n' = \frac{n_0 kv'_z}{\omega - kv_0} \tag{17}$$

其次,把扰动电流密度 $\vec{J}'$当成如下关于扰动场的波动方程的源项,得到:

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\vec{E}' + \nabla\times\nabla\times\vec{E}' = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}' \tag{18}$$

根据扰动场按照 $\exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t)$这个形式变化的假设,方程(18)可以改写为:

$$(k^2c^2 - \varepsilon\omega^2)\vec{E}' - k^2\vec{E}'_z = \frac{\mathrm{i}\omega}{\varepsilon_0}\vec{J}' \tag{19}$$

联合上述所有方程,最终我们得到关于扰动场的自洽方程如下:

$$D\cdot\vec{E}' = 0 \tag{20}$$

这里 D 是 Maxwell 张量,其具体分量具体表达式如下:

$$D_{11} = D_{22} = k^2c^2 - \varepsilon\omega^2 + \frac{\omega_p^2}{\gamma_0}\,\frac{(\omega - kv_0)^2}{(\omega - kv_0)^2 - \Omega_0^2} \tag{21}$$

$$D_{12} = D_{21}^* = \frac{\mathrm{i}\omega_p^2\Omega_0(\omega - kv_0)}{\gamma_0(\omega - kv_0)^2} \tag{22}$$

$$D_{33} = \frac{\omega_p^2 \omega^2}{\gamma_0^3 (\omega - kv_0)^2} - \varepsilon\omega^2 \tag{23}$$

$$D_{13} = D_{23} = D_{31} = D_{32} = 0 \tag{24}$$

其中 $\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{m_0 \varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ 是电子注的等离子体频率，在方程(22)中的星号表示复数共轭项。最终，色散关系由下述方程给出：

$$\det D = 0 \tag{25}$$

进一步得到

$$\varepsilon\omega^2 - k^2c^2 - \frac{\omega_p^2(\omega - kv_0)}{\gamma_0(\omega - kv_0 \pm \Omega_0)} = 0 \tag{26}$$

及

$$(\omega - kv_0)^2 - \frac{\omega_p^2}{\varepsilon\gamma_0^3} = 0 \tag{27}$$

很明显，方程(27)给出如下两个模式：

$$\omega = kv_0 \pm \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon\gamma_0^3}} \tag{28}$$

这两个模式分别对应于沿着外加磁场方向传播的快空间电荷波与慢空间电荷波。在方程(28)中没有出现外加磁场，这是因为沿着磁场方向电子的运动不受磁场影响的缘故。在我们目前的研究中，假设电子注等离子频率非常小(即假设电子注的密度非常小)，空间电荷效应对注－波互作用影响不大，另外，在下面一节再简单介绍一下慢空间电荷波与负能量波等相关的概念，以及慢空间电荷波与反常 Doppler 效应之间的关系。

在方程(26)中，正号和负号分别对应于右旋圆偏振电磁波与左旋圆偏振电磁波。如果我们假设外加磁场 $B_0 > 0$，容易看出，如果电子注速度大于介质中电磁波的相速度，那么对于左旋电磁波，扰动是稳定的；而对于右旋电磁波，却有不稳定性存在。下面来进一步讨论右旋电磁波的情况。很明显，不稳定发生在方程(26)中分母为零的附近，亦即

$$\omega - kv_0 + \Omega_0 \approx 0 \tag{29}$$

式(29)就是基于反常 Doppler 效应的电子回旋脉塞注－波互作用的谐振条件。

2 变分法求解不稳定性增长率

下面使用变分法来决定在如下频率

$$\omega_0 = kv_0 - \Omega_0 = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{30}$$

附近的不稳定性的增长率以及空间增长率。在方程(27)中假设

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega \tag{31}$$

这样就得到：

$$\varepsilon(\omega_0 + \delta\omega)^2 - k^2c^2 - \frac{\omega_p^2(\Omega_0 - \delta\omega)}{\gamma_0 \delta\omega} = 0 \tag{32}$$

同时我们假设 $\delta\omega << \omega_0$ 且 $\delta\omega << \Omega_0$，这样就有

$$\delta\omega = \pm \mathrm{i} \frac{\Omega_0 \omega_p^2}{2\varepsilon\gamma_0\omega_0} \tag{33}$$

最终，我们得到增长率 ω_I 的表达式如下：

$$\omega_I = \mathrm{lm}\delta\omega = \omega_p \left(\frac{\Omega_0}{2\varepsilon\omega_0\gamma_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

而空间增长率(α)可以由电子注电流(I)，电子注半径(a)及 Alfven 电流($I_A = \frac{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^3}{e}$)给出：

$$\alpha = \left(\frac{2I\Omega_0}{\varepsilon\gamma_0 I_A \omega_0 a^2 \beta_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{35}$$

这里 $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$。

3 结论

本文研究结果表明，直线相对论电子注与介质中的慢波互作用时会有不稳定性产生，在 $\omega_0 = kv_0 - \Omega_0 = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}}$ 附近，不稳定性的增长率及空间增长率分别如方程(34)及式(35)所示。该不稳定性表明，可以使用该机制使得微波得到放大，对一种新型高功率器件的制造提高一种理论可行性的指导。

参 考 文 献

1 Shafranov V D. Derivation of the dielectric permeability tensor of a plasma. Plasma Physics and the problem of controlled thermonuclear reactions. Oxford : Pergamon Press, 1958; 4: 489—454

2 Trubnikov B A. Electromagnetic waves in a relativistic plasma in a magnetic field. Plasma Physics and the problem of Controlled Thermonuclear Reactions, Oxford:Pergamon Press,1959;3:122—138

3 Neufeld J, Wright H. Instabilities in a plasma – beam system immersed in a magnetic field. Physical Review,1963;129(4): 1489—1507

4 Neufeld J, Wright H. Interaction of a plasma with a helical electron beam. Physical Review,1964; 135(5): A1175—A1189

5 Schlickeiser R. Relativistic kinetic theory of plasma waves. Physica Scripta, 1998; T75:33—38

6 Lazar M, Schlickeiser R. Relativistic kinetic theory of electromagnetic waves in equilibrium magnetized plasma. General dispersion equations. Canadian Journal of Physics,2003; 81:1377—1387

7 Bergman J, Eliasson B. Linear wave dispersion laws in unmagnetized relativistic plasma: Analytical and numerical results. Physics of Plasmas, 2001;8 (5):1482—1492

8 Lazar M, Schlickeiser R. Relativistic kinetic dispersion theory of linear parallel waves in magnetized plasmas with isotropic thermal distributions. New Journal of Physics, 2006;8:66—69

9 Vrba P, Schrotter J, Jarosova K P, *et al*. The dispersion relation of the charge and current compensated relativistic electron beam – plasma system. Czech J Phys B, 1978; 28: 971—984

10 Castejon F. Relativistic plasma dielectric tensor evaluation based on the exact plasma dispersion functions concept. Physics of Plasmas, 2006;13:072—105

The Dispersion Relation of Rectilinear Relativistic Electron Beam-slow Wave Interaction System

FU Cheng-zhi

(Instifufe of Mathematics & Ptiysics, Jinchu Palytechuical School, Jinmen 448000, P. R. China)

[**Abstract**] The dispersion relation of relativistic rectilinear electron beam and slow-wave system is investigated by cold fluid model within the small signal limit. Instability occurs when the electron velocity exceeds the wave phase velocity. The dispersion equation, growth rate and spatial growth rate are studied analytically. The distinctive interaction mechanism is promising for the design of a new kind of compact high-power microwave generation devices.

[**Key words**] dispersion relation　rectilinear relativistic electron beam　growth rate