关于均值单边检验的局限性

王雪琴
(渭南师范学院数学与信息科学系,渭南 714000)

摘 要 通过实例论述了关于均值的原假设 $H_0:a\leqslant a_0(a\geqslant a_0)$ 仅进行单边检验的局限性——只给出单边拒绝域是不合理的。首次给出对 $H_0:a\leqslant a_0(a\geqslant a_0)$ 进行双边检验的方法及双边拒绝域,其结果有重要的应用价值。

关键词 拒绝域 双边检验 单边检验 小概率事件
中图法分类号 O211.3; **文献标志码** A

在均值假设检验中,对于原假设 $H_0:a\leqslant a_0(a\geqslant a_0)$ 至今一直采用单边检验的方法,我们认为单边检验是有局限性的——对于原假设 $H_0:a\leqslant a_0(a\geqslant a_0)$ 的检验方法是不合理的,只有在两次单边检验都通过的条件下,才能接受 H_0,否则应拒绝 H_0。下面给出均值检验的基本步骤及基本思想。

设总体 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$,$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为 ξ 的样本,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 独立同 ξ 分布,则 $\dfrac{\bar{\xi}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$。

σ^2 已知时,文献[1—3]中给出了对 a 进行双边检验的基本步骤。

由基本步骤可见假设检验的基本思想是概率性质的反证法。即在原假设 H_0 成立的条件下,若统计量 $\dfrac{\bar{\xi}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$(是随机变量)在一次试验中落入拒绝域 $D=(-\infty,-u_\alpha]\cup[u_\alpha+\infty)$ 中,是小概率件发生,则拒绝原假设 H_0,否则接受原假设 H_0。

根据假设检验的基本思想知对 $H_0:a\leqslant a_0(a\geqslant a_0)$ 进行单边检验是不合理的,因而给出双边检验的基本方法,分为 σ^2 已知和 σ^2 未知两种情况进行讨论。

1 主要结果

1.1 σ^2 已知时,对 a 进行两个单边检验($H_0:a\leqslant a_0$)

分析 选取统计量 $U_0=\dfrac{\bar{\xi}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$,在 H_0 为真的条件下,$E(U_0)=\dfrac{E(\bar{\xi})-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{a-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant 0$,$U_0\sim N\left(\dfrac{a-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},1\right)$,所以 U_0 远大于 0 的可能性较小,拒绝域应选在如图 1 所示的右边部分。但仅仅考虑一边的拒绝域是不完全的,因为 $U_0\sim N\left(\dfrac{a-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},1\right)$,从图 1 中看出,当 $\dfrac{\bar{\xi}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 取值很小时,即 $\dfrac{\bar{\xi}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 是一个绝对值很大的负数时,也意味着小概率事件发生,依据假设检验的基本思想也应该拒绝 H_0。

2010 年 4 月 8 日收到 国家自然科学基金项目(10571026)、陕西省教育厅科研计划项目(06JK301)、渭南师院科研计划项目(10YKS011)、基础数学重点学科资助
作者简介:王雪琴(1962—),女,陕西大荔人,副教授,研究方向:截尾模型的可靠性分析。

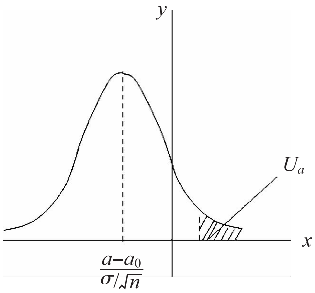

图 1　统计图

参考文献[1]中给出了一个单边检验的结果为当 $\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}>u_\alpha$ 时，拒绝原假设 H_0。

到此，对 $H_0: a\leqslant a_0$ 的假设检验还是不完整的，直观地，上述拒绝原假设 H_0 的理由是因 $\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 取值太大，但是否 $\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 的取值就是越小越好呢？当然不是。为此，我们还应讨论另一个拒绝域。

(1) 假设 $H_0: a\leqslant a_0$；

(2) 因为 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$，$n=-\xi$，

则

$$f_\eta(y)=f(\phi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(-y-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-(-a))^2}{2\sigma^2}};-\infty<y<+\infty,$$

$\sigma>0$ 即：$\eta\sim N(-a,\sigma^2)$，故样本函数 $U=\frac{\bar{\eta}-(-a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$；

(3) 对于给定的显著水平 α，查 $N(0,1)$ 表，确定 $-u_\alpha$；

(4) 因为 $a\leqslant a_0$，所以 $\frac{\bar{\eta}+a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\leqslant\frac{\bar{\eta}+a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$，从而对于给定的 ξ 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，得到 $\eta=-\xi$ 的样本值为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$（其中 $y_i=-x_i, i=1,2,\cdots,n$），计算出 $\frac{\bar{y}+a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{-\bar{x}+a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$，当 $\frac{-\bar{x}+a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-u_\alpha$ 时，当然有 $\frac{-\bar{x}+a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-u_\alpha$；(5) 判断　当 $\frac{-\bar{x}+a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-u_\alpha$ 时，拒绝原假设 H_0。

综上所得：当 $\left|\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|>u_\alpha$ 时，拒绝原假设 H_0；否则，接受原假设 H_0。这一结论和通常给出的单边拒绝域是不相同的；可见，单边检验是不合理的——对原假设 $H_0: a\leqslant a_0$ 的检验是不完整的，必须在两次单边检验都通过的条件下，才能接受原假设 $H_0: a\leqslant a_0$。

对于原假设 $H_0: a\geqslant a_0$ 的检验，同样的理由也应进行两次单边检验，只有在两次单边检验都通过的条件下，原假设才能成立，其结论是：当 $\left|\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|>u_\alpha$ 时，接受原假设 H_0；当 $\left|\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<u_\alpha$ 时，拒绝原假设 H_0。

1.2　σ^2 未知时，对 a 进行两个单边检验

已知，若 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$，则有 $T=\frac{\bar{\xi}-a}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，参考文献[2]给出了一个单边检验的结果为当 $\frac{\bar{x}-a_0}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}>t_\alpha$ 时，拒绝原假设 H_0。

和 1.1 中具有同样的理由，对于原假设 $H_0: a\leqslant a_0$ 还应考虑另一个拒绝域。

(1) 假设 $H_0: a\leqslant a_0$；

(2) 因为 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$，令 $\eta=-\xi$，则 $\eta\sim N(-a,\sigma^2)$，

而 $T=\sqrt{n-1}\dfrac{\bar{\eta}-(-a)}{s}\sim t(n-1)$；

$\dfrac{\bar{\eta}-(-a)}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$。

故考虑样本函数 $T=\dfrac{\bar{\eta}-(-a)}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}$；

(3) 对于给定的显著水平 α，查 $t(n-1)$ 表，确定 $-t_{\alpha}$；

(4) 因为 $a\leqslant a_0$，所以$\dfrac{\bar{\eta}-(-a)}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}\leqslant\dfrac{\bar{\eta}-(-a_0)}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}$，从而对于给定的 ξ 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，得到$\eta=-\xi$ 的样本值为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$(其中 $y_i=-x_i,i=1,2,\cdots,n$)，计算出$\dfrac{\bar{y}+a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}=\dfrac{-\bar{x}+a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}$；当$\dfrac{-\bar{x}+a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}<-t_{\alpha}$ 时，当然有$\dfrac{-\bar{x}+a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}<-t_{\alpha}$；

(5) 判断当$\dfrac{-\bar{x}+a_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}<-t_{\alpha}$ 时，拒绝原假设 H_0。

综上所得：当$\left|\dfrac{\bar{x}-a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}\right|<t_{\alpha}$ 时，接受原假设 H_0，否则拒绝原假设 H_0。

同理，对原假设 $H_0:a\geqslant a_0$ 也应进行两次单边检验，其结论是：

当$\left|\dfrac{\bar{x}-a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}\right|>t_{\alpha}$ 时，接受原假设 H_0，当$\left|\dfrac{\bar{x}-a_0}{\dfrac{s^{*}}{\sqrt{n}}}\right|<t_{\alpha}$ 时，拒绝原假设 H_0。

可见当 σ^2 未知时对 $H_0:a\leqslant a_0$ 的假设检验，给出的拒绝域应是双边拒绝域，而不是现行的单边拒绝域。

2 应用举例

2.1 例 1[4]

某厂生产一种灯管，其寿命 $\xi\sim N(a,200^2)$，从过去的经验看 $a\leqslant 1\ 500$ h，今采用新工艺进行生产后，再从产品中随机抽 25 只进行测试，得到寿命的平均值为 1 675 h，问：采用新工艺后，灯管质量是否有显著提高($\alpha=0.05$)？

分析：从过去的经验看 $a\leqslant 1\ 500$ h，而测试的结果为$\bar{x}=1\ 675>1\ 500$ h，但我们只有在拒绝了假设 $H_0:a\leqslant 1\ 500$ 后才能作出灯管质量有显著提高的结论，故要检验假设 H_0：a$\leqslant 1\ 500$，因此，须对此题进行两次单边检验。

解一 (1) 假设 $H_0:a\leqslant 1\ 500$；

(2) 取统计量 $U=\dfrac{\bar{x}-a_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$，根据 $a_0=1\ 500,\sigma=200,n=25,\bar{x}=1\ 675$，得：$U=4.375$；

(3) 对于题目中给定的显著水平 $\alpha=0.05$，查 $N(0,1)$ 表确定临界值 $u_{\alpha}=u_{0.05}=1.65$；

(4) 由于 $4.375>1.65$，故拒绝原假设 H_0，即认为采用新工艺后，灯管质量提高了。

解二 (1) 假设 $H_0:a\leqslant 1\ 500$；

(2) 考虑样本函数 $U=-\dfrac{-\bar{x}-(-a_0)}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{-\bar{x}+a_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$，根据已知的条件，得 $U=-4.375$；

(3) 对于题目中给定的显著水平 $\alpha=0.05$，查 $N(0,1)$ 表，确定临界值 $-u_{\alpha}=-u_{0.05}=-1.65$；

(4) 由于 $-4.375<-1.65$，故拒绝原假设 H_0，即认为采用新工艺后，灯管质量提高了。

由解一及解二可得，采用新工艺后，灯管质量提高了。

2.2 例 2[5]

设木材的小头直径 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$，$a\geqslant 12$ cm 为

合格,今抽出 12 根测得小头直径的样本均值 $\bar{x}=11.2$ cm,样本方差 $s^{*2}=1.44\ \text{cm}^2$,问该批木材是否合格($\alpha=0.05$)?

分析:$a\geqslant 12$ cm,而今测得 $\bar{x}=11.2\ \text{cm}<12\ \text{cm}$,这引起我们对木材质量的怀疑,但由于不能轻率地否定这批木材是合格的,故要检验假设 $H_0: a\leqslant 12$,因此,须对此题进行两次单边检验。

解一　(1) 假设 $H_0: a\geqslant 12$;

(2) 取统计量 $T=\dfrac{\bar{x}-a_0}{\frac{s^*}{\sqrt{n}}}$,据 $\bar{x}=11.2$, $a_0=12$, $s^*=1.2$, $n=12$, $T=-2.3094$;

(3) 对于题目中给定的显著水平 $\alpha=0.05$,查 $t(n-1)$ 表,可得:

$$-t_{\alpha}(n-1)=-t_{0.05}(11)=-1.1959;$$

(4) 因为 $-2.3094<-1.7959$,故拒绝原假设 H_0,即认为该批木材是不合格的。

因为第一部分中已经拒绝了原假设 H_0,所以第二部分可以省掉。因此,该批木材是不合格的。

从以上的分析可以看出,在均值假设检验中,单边检验是有局限性的—对于原假设 $H_0: a\leqslant a_0$ ($a\geqslant a_0$) 等仅进行单边检验是不合理的,必须进行两次单边检验(即双边检验),才能使检验更加合理、更加完善,这是均值假设检验研究中的一个创新。

参　考　文　献

1 缪铨生.概率与数理统计(修订版).上海:华东师范大学出版社,1997

2 盛　骤,谢式千.概率论与数理统计习题全解(第二版).北京:高等教育出版社,1989

3 马阵华.概率统计与随机过程卷.北京:清华大学出版社,2000

4 曾善玉.应用概率统计.北京:科学出版社,2000

5 黄璞生,李柏玲,王雪琴,等.工程数学题解词典.西安:陕西科学技术出版社,2002

On the Limitation of Average Value Unilateral Examination

WANG Xue-qin

(Dept. of Maths and Information Science, Weinan Teacher's College, Weinan 714000, P. R. China)

[**Abstract**] The limitation of unilateral examination about average value original supposition uitl case is elaborated. It is only unreasonable to produce resistance area. The first time to method and bilateral resistance area of $H_0: a\leqslant a_0$ ($a\geqslant a_0$) is produced. And its result has important prafical value.

[**Key words**] resistance areas　bilateral examination　unilateral examination　small probability event