第 10 卷 第 18 期 2010 年 6 月
1671-1815(2010)18-4499-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 18 June 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

通信技术

利用傅里叶积分性质计算信号频谱函数的补充说明

张国强 杜清珍*

(西北工业大学明德学院,西安 710124)

摘 要 在介绍连续信号频域分析的傅里叶变换时域积分性质时,虽然有些给出了证明过程,但不够严谨,且直接应用该性质进行求解的范围比较小。通常该性质是与微分性质结合在一起来求解某一信号频谱密度函数的,为避免草率的套用结论而可能引起的计算错误,现利用严格的微积分对这一问题进行了理论补充并加以举例说明,引出了利用傅里叶积分性质求解某一信号频谱密度函数的引申公式,扩展了积分性质的应用范围。

关键词 频域分析 傅里叶变换 频谱密度函数

中图法分类号 TN911.6; **文献标志码** A

1 理论分析

一个时域的非正弦周期信号 $f(t)$ 只要满足 Dirichlet 条件,即可利用傅里叶变换求出其频谱函数 $F(\mathrm{j}w)$,从而将信号的特性从频域进行完整的描述,这个条件要求函数 $f(t)$ 满足绝对可积,即:$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$,而对于某些时域不满足绝对可积条件的信号,则可从极限的观点在频域中引入冲激函数,仍然可以得到相应的频谱函数,如:直流信号 $f(t)=1$,其对应的频谱函数为 $F(\mathrm{j}w)=2\pi\delta(w)$,单位阶跃信号 $f(t)=U(t)$,其对应的频谱函数为 $F(\mathrm{j}w)=\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}$,符号函数 $f(t)=\mathrm{sgn}(t)$,其对应的频谱函数为 $F(\mathrm{j}w)=\frac{2}{\mathrm{j}w}$,傅里叶变换和反变换建立起了信号的时间函数与频谱密度函数之间的一一对应关系[1—6],若所有信号的频谱函数都采用公式来做无疑很麻烦,所以往往在记住常见信号的频谱函数基础上,利用傅里叶变换的性质来做比较快捷方便,另外若想进一步研究信号 $f(t)$ 的时域特性与频域特性之间的关系,也很有必要研究傅里叶变换的基本性质。

傅里叶变换基本性质中有一条重要性质就是时域积分性,即:若有 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}w)$,则有 $\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\pi F(0)\delta(w)+\frac{F(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}$,要求 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t<\infty$,其中 $F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$。有些教材在证明该性质时是利用傅里叶变换的时域卷积性进行证明的,即在证明的过程中利用了卷积的一个性质:$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau=\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\delta(t)=f(t)U(t)$,前一个等号是严格相等的,但后一个等号要成立是有条件的,须有 $f(-\infty)=0$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0$,所以该证明过程不具备普遍性,下面给出该性质的严谨证明过程:

证明 设 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}w)$,$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow G(\mathrm{j}w)$,则:

$$G(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]e^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t=$$

2010 年 3 月 31 日收到

第一作者简介:张国强(1980—),男,汉族,山东青岛人,硕士,西北工业大学明德学院机电工程系测控技术与仪器专职教师。

* 通信作者简介:杜清珍(1950—),女,汉族,陕西西安人,副教授,西北工业大学明德学院机电工程系测控技术与仪器专业负责人。E-mail:dingwu232@163.com。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)U(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$$

交换积分顺序$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} U(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$ 。

$$\because U(t)\leftrightarrow \pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\Rightarrow U(t-\tau)\leftrightarrow \left[\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau};$$

$$\begin{aligned}\therefore G(\mathrm{j}w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} U(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\pi\delta(w)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\mathrm{j}w}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau = \\ &\pi\delta(w)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\mathrm{j}w}F(\mathrm{j}w)\text{。}\end{aligned}$$

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t<\infty$，则上式 $=\pi F(0)\delta(w)+\frac{F(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}$，证毕。

不过该性质的应用范围比较小,因为一个信号 $f(t)$ 的时域积分信号一般并不易观察或求解出,这就限制了该性质的应用范围,所以我们引出该性质的引申应用。虽然信号 $f(t)$ 的时域积分信号不易求得,往往其导函数 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 容易求得,那么求 $f(t)$ 的傅里叶变换过程就可转化为先计算其导函数 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 的傅里叶变换再结合积分性质计算出 $f(t)$ 的傅里叶变换,但先求导再运用积分性质的话就需要对积分性质的公式进行修正,即:

若有:$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow\Phi(\mathrm{j}w)$ 。

则有:

$$f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}w)=\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}+\pi[f(-\infty)+f(+\infty)]\delta(w)$$

,证明过程如下:

$$\because \int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau=f(t)-f(-\infty)\Rightarrow f(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau+f(-\infty);$$

$$\begin{aligned}\therefore F(\mathrm{j}w) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau+f(-\infty)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}U(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t + \\ &f(-\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t\text{。}\end{aligned}$$

交换积分顺序$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}U(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau+f(-\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$。

$$\begin{aligned}&\left[\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau+f(-\infty)2\pi\delta(w) = \\ &\pi\delta(w)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\mathrm{j}w}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w\tau}\mathrm{d}\tau + \\ &f(-\infty)2\pi\delta(w)=\pi\delta(w)[f(+\infty)- \\ &f(-\infty)]+\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}+f(-\infty)2\pi\delta(w) = \\ &\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}+\pi[f(-\infty)+f(+\infty)]\delta(w)\end{aligned}$$

,条件:$f(\pm\infty)<\infty$,证毕。

2 举例说明

例 1 如图 1 所示的信号 $f(t)$,求其傅里叶变换 $F(\mathrm{j}w)$ 。

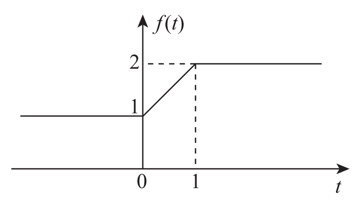

图 1 示例曲线

此例的函数由于不满足绝对可积条件,不能由傅里叶变换的定义,即:

$F(\mathrm{j}w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt}\mathrm{d}t$ 来计算,可采用上述讨论的方法来求解,先计算 $f(t)$ 的导函数的傅里叶变换,之所以这样做是因为 $f(t)$ 的导函数我们非常熟悉,为一单脉冲的矩形信号, 图形如图 2 所示,其傅里叶变换 $\Phi(\mathrm{j}w)=Sa\left(\frac{w}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}w}$,根据积分性质的引申,$F(\mathrm{j}w)=\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}+\pi[f(-\infty)+f(+\infty)]\delta(w)$,由于 $f(+\infty)=2$,$f(-\infty)=1$,所以得出 $f(t)$ 的傅里叶变

换 $F(\mathrm{j}w)=\frac{1}{\mathrm{j}w}Sa\left(\frac{w}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\frac{1}{2}w}+3\pi\delta(w)$,为验证该结果的正确性,我们还可寻求另外一种方法,将$f(t)$的表达式写成$f(t)=U(-t)+(t+1)[U(t)-U(t-1)]+2U(t-1)=U(-t)+tU(t)+U(t)-(t-1)U(t-1)$,分别求出各展开项的傅里叶变换:

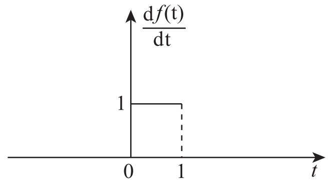

图 2　单脉冲信号

$U(t)\leftrightarrow\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}$, $U(-t)\leftrightarrow\pi\delta(w)-\frac{1}{\mathrm{j}w}$,

$-jtU(t)\leftrightarrow\pi\delta'(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w^2}$, $tU(t)\leftrightarrow\pi\mathrm{j}\delta'(w)+\frac{1}{w^2}$,

$(t-1)U(t-1)\leftrightarrow[\pi\mathrm{j}\delta'(w)+\frac{1}{w^2}]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w}$。

最后根据傅里叶变换的叠加性同样可得$F(\mathrm{j}w)=\frac{1}{\mathrm{j}w}Sa\left(\frac{w}{2}\right)\mathrm{e}^{-j\frac{1}{2}w}+3\pi\delta(w)$,此例若不加分析而直接运用书上的结论则可能得出$F(\mathrm{j}w)=\frac{1}{\mathrm{j}w}Sa\left(\frac{w}{2}\right)e^{-j\frac{1}{2}w}+\pi\delta(w)$的错误结论来。

例 2　如图 3 所示信号$f(t)$,求其傅里叶变换$F(\mathrm{j}w)$。

先计算该信号导函数的傅里叶变换,其导函数为$\delta(t-1)$,对应的傅里叶变换$\Phi(\mathrm{j}w)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w}$,而$f(-\infty)=1$,$f(+\infty)=2$,代入积分性质的引申公式中可得$F(\mathrm{j}w)=3\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}e^{-\mathrm{j}w}$,我们仍可以采用另一种方法验证该结果,将$f(t)$表达式写成$f(t)=1+U(t-1)$,其中:$1\leftrightarrow2\pi\delta(w)$,$U(t-1)\leftrightarrow\left[\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w}$,根据傅里叶变换的叠加性可得$F(\mathrm{j}w)=2\pi\delta(w)+\left[\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}w}=3\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}e^{-\mathrm{j}w}$,若直接套用书上结论则可能得出$F(\mathrm{j}w)=\pi\Phi(0)\delta(w)+\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}=\pi\delta(w)+\frac{1}{\mathrm{j}w}e^{-\mathrm{j}w}$的错误结论。

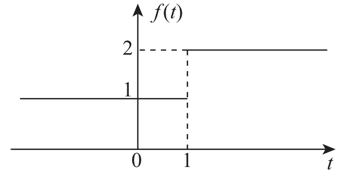

图 3　$f(t)$信号

3　结论

由上述理论分析和举例说明可以看出,若要运用积分性质求信号的傅里叶变换时应采用积分性质的引申公式来计算,不能直接套用$\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}+\pi\Phi(0)\delta(w)$进行计算。区别在于:$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$表示的是信号$f(t)$的积分信号,且是唯一的,即只要给定一个信号$f(t)$,有且只有一个$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$,所以教材中给出的关于傅里叶变换积分性质的公式结论是正确的,但若先求导再积分却不一定能恢复出$f(t)$来。比如有$\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right]=\delta(t)$,不能说$U(t)$和$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$都是$\delta(t)$的积分信号。所以若先对函数$f(t)$进行微分计算出$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$的傅里叶变换$\Phi(\mathrm{j}w)$,再利用积分性质求$f(t)$的傅里叶变换,应运用积分性质的引申形式,即:$\frac{\Phi(\mathrm{j}w)}{\mathrm{j}w}+\pi[f(-\infty)+f(+\infty)]\delta(w)$,否则有可能导致错误的结果。

参　考　文　献

1　范世贵. 信号与线性系统(第二版). 西安:西北工业大学出版社,2006

2　徐天成. 信号与系统(第三版),北京:电子工业出版社,2008

3　管致中. 信号与线性系统(第四版). 北京:高等教育出版社,2004

4　吴大正. 信号与系统(第四版). 北京:高等教育出版社,2005

5　郑君里. 信号与系统(第二版). 北京:高等教育出版社,2000

6　(美)奥本海姆. 信号与系统(第二版). 刘树棠,译. 西安:西安交通大学出版社,2008

Supplemental Instruction of Using Fourier Integration Property in Time Domain to Calculate a Certain Signal's Spectrum Density Function

ZHANG Guo-qiang, DU Qing-zhen
(College of Mingde, Northwest Polytechnical University, Xi'an 710124, P. R. China)

[**Abstract**] As almost all the text books about signal and linearity system available now don't discuss the limitations of using Fourier integration property to calculate a certain signal's spectrum density function. At researching how to prove this property based on precise calculus and how to use it in order to avoid causing mistakes are aim. An extending formula is introduced which can be used to calculate a certain signal's spectrum density function and extend the range of application of the Fourier integration property.

[**Key words**] frequency domain analysis Fourier transform spectrum density function

(上接第 4492 页)

参 考 文 献

1 邵先杰. 河南油田低品位稠油油藏蒸汽吞吐后进一步提高采收率研究. 大庆石油地质与开发, 2005; 24(6): 84—86
2 肖卫权, 高孝田, 张玉霞, 等. 河南油田超稠油油藏蒸汽驱的可行性及先导性试验. 石油天然气学报, 2008; 30(1): 341—343
3 殷代印, 张湘娟. 朝阳沟油田蒸汽驱数值模拟研究. 特种油气藏, 2008; 15(1): 59—61

Injection-production Parameters Optimization on Steam Flooding of Fault Block BQ10 in Gucheng Heavy Oilfield

LI Jiao-na, HAO Ai-ping, HAN Ru-feng, YANG Wei
School of Earth Sciences, Daqing Petroleum Institute, Daqing, 163318, P. R. China;
Oil Product No. 2 Plant, Daqing Oil Field Limited Company[1], Daqing, 163414, P. R. China)

[**Abstract**] Eh3 Ⅳ9formation in fault block BQ10 of Gucheng heavy oilfield is typically extra-super heavy oil reservoir with medium thick reservoir in shallow, which is exploited by mode of steam stimulation. Based on the fine reservoir description combined with the data of geology, logging and production performance, fine reservoir geological model is set up by means of Petrel and numerical simulation is conducted through STARS module of CMG. It is optimized for well pattern, time and injection-production parameters of steam flooding. Optimization results show that in the period of steam flooding reverse square 9 spot well pattern with the size of $70 \times 100\ m^2$, production injection ratio in the range of 1.0—1.2 and steam quality more than 60% are preferable.

[**Key words**] super-heavy oil steam flooding numerical simulation history match parameter optimization