第10卷　第18期　2010年6月
1671-1815(2010)18-4461-02

科　学　技　术　与　工　程
Scie nce Technology and Engineering

Vol. 10　No. 18　June 2010

关于 Diophantine 方程 $x^3-1=py^2$

高　洁　梁　勇
(西北大学数学系,西安 710127)

摘　要　利用初等数论的方法得到丢番图方程 $x^3-1=py^2$ 无正整数解的一个充分条件。设 p 是奇素数,证明了当 $p=3(4k+3)(4k+4)+1$, 其中 k 是非负整数,则方程 $x^3-1=py^2$ 无正整数解。

关键词　丢番图方程　正整数解　奇素数　同余　Legendre 符号
中图法分类号　O156.1;　　**文献标志码**　A

设 N^+ 是全体正整数集, D 是无平方因子的正整数,方程 $x^3\pm1=Dy^2,x,y\in \boldsymbol{N}^+$ 是一类重要的不定方程,已有不少研究文章发表。柯召和孙琦[1,2],曹珍富[3]等人证明了当 D 不含 $6k+1$ 形的素因子时,方程无整数解,但当 D 含 $6k+1$ 形的素因子时,方程的求解较为困难。王镇江和佟瑞洲[4]证明了 $x^3+1=13y^2$ 无正整数解。乐茂华[5]证明了当 $p=12s^2+1$ 的素数时,其中 s 是奇数,方程 $x^3+1=py^2$ 无正整数解。但很少有人研究方程 $x^3-1=py^2$。本文证明了当素数 $p=3(4k+3)(4k+4)+1$ 时,方程 $x^3-1=py^2$ 无正整数解。

1　主要引理

引理1[6]　设不定方程 $Ax^2-By^2=1,A>1,A,B\in \boldsymbol{N}$ 有正整数解, (x_0,y_0) 是方程的最小正整解,方程的全部正整数解 (x,y) 可由下式给出。

$$x\sqrt{A}+y\sqrt{B}=[x_0\sqrt{A}+y_0\sqrt{B}]^t,$$

其中 t 是正奇数。

引理2　不定方程 $pX^2-3Y^2=1,X,Y\in\mathbf{N}^+$, 设 $(X,Y)=(2w,2z^2+1)$ 是方程的一组解,而方程的其最小整数解为 $(2,y_0)$, 则当形如 $8k+5,8k+7$ 的素数 $p\mid y_0$ 时,该方程无正整数解。

证明　由引理1可知

$$2w\sqrt{p}+(2z^2+1)\sqrt{3}=[2\sqrt{p}+y_0\sqrt{3}]^t \tag{1}$$

故有 $2z^2+1\equiv0\pmod{y_0}$, 又因为素数 $p\mid y_0$ (其中 $p=8k+5$ 或 $8k+7$),因此 $(2z)^2\equiv-2\pmod p$, 而模 p 的 Legendre 符号 $\left(\frac{-2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=-1$, 矛盾,故方程 $pX^2-3Y^2=1,X,Y\in\boldsymbol{N}^+$ 无正整数解。

2　定理和推论

定理1　设 p 是奇素数,如果 $p=3(4k+3)(4k+4)+1$, 其中 k 是非负整数,则方程

$$x^3-1=py^2,x,y\in\boldsymbol{N}^+ \tag{2}$$

无整数解。

证明　因为 $(x-1,x^2+x+1)=1$ 或 3, 故方程(2)给出下列四种可能的分解。

(Ⅰ)　$x-1=pz^2,x^2+x+1=w^2,y=zw$;

(Ⅱ)　$x-1=3pz^2,x^2+x+1=3w^2,y=3zw$;

(Ⅲ)　$x-1=z^2,x^2+x+1=pw^2,y=zw$;

(Ⅳ)　$x-1=3z^2,x^2+x+1=3pw^2,y=3zw$。

其中 $(z,w)=1$, 以下分别讨论这几种情形所给出的不定方程(2)正整数解的情况。

情形(Ⅰ)　解第二式得 $x=0$ 或 -1, 均不适合第一式,该情形不定方程(2)无正整数解。

情形(Ⅱ)　可由文献[7]和文献[8]知无正整数解。

情形(Ⅲ)　由 $x-1=z^2\equiv0,1,4\pmod 8$, 得

2010年3月30日收到
第一作者简介:高　洁(1986—),男,陕西富县人,硕士,研究方向:数论。E-mail:missgaojie@126.com。

$x\equiv 1,2,5(\bmod 8)$，$x^2+x+1\equiv 3$ 或 $7(\bmod 8)$ 但是当 k 是偶数时 $p\equiv 5(\bmod 8)$，当 k 时奇数时 $p\equiv 1(\bmod 8)$。而由第二式知 w 是个奇数，$w^2\equiv 1(\bmod 8)$，因此 $pw^2=x^2+x+1\equiv 1$ 或 $5(\bmod 8)$ 矛盾，故情形Ⅲ无正整数解。

情形(Ⅳ) 由第二式的

$p(2w)^2-3\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=1$，再将第一式的 $x-1=3z^2$ 代入上式 $p(2w)^2-3(2z^2+1)=1$。由上式知，$(X,Y)=(2w,2z^2+1)$ 是方程

$$pX^2-3Y^2=1, X;Y\in \boldsymbol{N}^+ \tag{3}$$

的一组解。

将 $p=3(4k+3)(4k+4)+1$ 代入(3)式，可得 $(2,8k+7)$ 是方程(3)的最小正整数解。否则，$(1,y_0)$ 是方程(3)的最小整数解，此时 $y_0^2=\frac{p-1}{3}=(4k+3)(4k+4)$，右边是两个连续正整数的乘积，显然不成立。因此 $(2,8k+7)$ 是方程(3)的最小正整数解。

由式(1)得 $(2z)^2\equiv -2(\bmod(8k+7))$ (4)

当 $8k+7$ 是个素数时，由引理2可知式(4)矛盾，情形Ⅳ无正整数解。

当 $8k+7$ 是个合数时，不妨设

$8k+7=p_1^{r_1}p_2^{r_2}p_3^{r_3}L$，两边取模8则

$$7\equiv p_1^{r_1}p_2^{r_2}p_3^{r_3}Lp_j^{r_j}(\bmod 8) \tag{5}$$

易知(5)式有两种可能：

① p_j 中至少存在一个 $p_j\equiv 7(\bmod 8)$，不妨设为 p_1，由(4)式知 $(2z)^2\equiv -2(\bmod p_1)$，由引理2可知式(4)矛盾，情形Ⅳ无正整数解。

② p_j 中没有形如 $8k+7$ 的素因子时，必然存在 $p_m\equiv 3(\bmod 8)$，$p_n\equiv 5(\bmod 8)$，(p_m，p_n 为奇素数，$m,n\in j$)。由(4)式知 $(2z)^2\equiv -2(\bmod p_n)$，设 $p_n=8k_1+5$，则有由引理2可知式(4)矛盾，情形Ⅳ无正整数解。

综上知情形(Ⅳ)无正整数解。定理得证。

推论 根据定理1结果可知当 $p=37,397,1141,L$ 时，方程(2)无正整数解。

参考文献

1 柯 召，孙 琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=Dy^2$. 中国科学，1981；24(12)：1453—1457

2 柯 召，孙 琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=Dy^2$. 四川大学学报(自然科学版)，1981；18(2)：1—5

3 曹珍富. 丢番图方程引论. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989：209—213，271

4 王镇江，佟瑞洲. 关于丢番图方程 $x^3+1=13y^2$，$xy\neq 0$. 黑龙江大学学报(自然科学版)，1991；8(4)：48—50

5 乐茂华. 关于 Diophantine 方程 $x^3+1=py^2$. 广西师范学院学报(自然科学版)，2005；22(4)：22—23

6 牟善志，戴习民. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=py^2$. 安徽大学学报(自然科学版)，2008；32(1)：18—20

7 牟善志，李同军. 关于丢番图方程组的解. 河北机电学院学报，1996；13(4)：79—81

8 Walker D T. On the Diophantine equation $mx^2-ny^2=\pm 1$. Amer Math Monthly，1967；74：504—513

On the Diophantine Equation $x^3-1=py^2$

GAO Jie，LIANG Yong

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, P. R. China)

[**Abstract**] Using elementary theory of numbers methods, a sufficient condition is obtained that the Diophantine equation $x^3-1=py^2$ without the positive integer solution. Let p be an odd prime, that is proved if $p=3(4k+3)(4k+4)+1$, where k is a nonnegative integer, then the equation $x^3-1=py^2$ not has positive integer solution.

[**Key words**] Diophantine equation positive integer solution odd prime recurrent sequent Legendre symbol