第 10 卷　第 14 期　2010 年 5 月
1671-1815(2010)14-3439-03

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 10　No. 14　May 2010

一类分形集的分数阶微积分

潘学哉
(南京师范大学泰州学院数学系,泰州 225300)

摘　要　分形属于非线性科学,而构造分形集并用适当的方法对其进行研究是研究分形理论的重要手段之一。利用分数阶微积分的概念、性质对所构造的一类分形集(称之为康托 m 等份函数,设为 $\Phi(x)$)的分析性质进行讨论,揭示了函数 $\Phi(x)$ 在一定条件下,在[0,1]上是几乎处处连续的、在[0,1]上存在 ν 阶分数阶积分和在[0,1]上几乎处处存在 μ 阶分数阶微分。

关键词　分数阶积分　　分数阶微分　　康托 m 等份函数
中图法分类号　O189.12;　　　**文献标志码**　A

分形是研究自然界极不规则,支离破碎的现象、形状的。从分形发展至今的过程来看,现阶段研究该数学分支的主要方法有:

(1)维数计算。主要有 Hausdorff 维数与盒维数,前者主要在理论上用途较大,应用上较难计算;而后者却较易计算与估算,适合于应用。

(2)迭代函数系统。该方法在分形空间中研究,将所研究的分形集看作是某一迭代函数系统的吸引子。

(3)分形插值函数。通过分形插值数据集,把分形集看作是分形插值函数的图象。

(4)分数阶微积分。本文就是利用分数阶微积分来讨论所构造的分形集的性质。

1　主要概念及引理

1.1　分数阶微积分的定义

1.1.1　v 阶黎曼-刘维尔分数阶积分

令 $v>0$, $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 逐段连续, 且在 $[0,\infty)$ 上任一有界子区间上都可积,则 $\forall t>0$,我们称 ${}_0D_t^{-v}f(t)=\frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t(t-\xi)^{v-1}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 为 f 的 v 阶黎曼-刘维尔分数阶积分[1]。

2010 年 3 月 3 日收到
第一作者简介:潘学哉,男,南京师范大学泰州学院数学系讲师。

1.1.2　f 的 μ 阶分数阶微分

令 $\mu>0$, $m>\mu$ 且 m 是大于 μ 的最小整数,即 $m=[\mu]+1$,我们称 $D^{\mu}f(t)=D^{m}({}_0D_t^{-v}f(t))$ 为 f 的 μ 阶分数阶微分,这里 D^m 为通常的整数阶微分[1]。

1.2　分数阶积分的性质

引理 1　(连续性)令 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续且 $v>0$,则 $f(t)$ 的 v 阶分数阶积分在 $[0,\infty)$ 也连续,即 ${}_0D_t^{-v}f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 连续[2]。

引理 2　设 f 在 $[0,\infty)$ 单调增加且 $f\geqslant 0$,则 $f(t)$ 的 v 阶分数阶积分 ${}_0D_t^{-v}f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调增加,这里 $v>0$。

推论　有界变差函数几乎处处存在分数阶微分。

证明　设 $f(t)$ 为有界变差函数,设 $A>0$,令 $g(t)=f(t)-f(0)$;即 $v_a^b(f)\leqslant M(\exists M>0)$。则 $g(t)$ 也是 $[0,A]$ 上有界变差函数,所以由 Jordan 分解定理得 $g(t)$ 可以分解为两个单调增加函数之差。令 $g(t)=g_1(t)-g_2(t)$,其中 $g_i(t)(i=1、2)$ 为单调增加函数,其中不妨设 $g_1(0)=g_2(0)=0$,所以 $g(0)=0$。否则令 $g_1'(t)=g_1(t)-g_1(0)$, $g_2'(t)=g_2(t)-g_2(0)$,所以 $g(t)=g_1'(t)-g_2'(t)$,则 $\forall t\in[0,A]$ 有 $g_1(t)\geqslant 0, g_2(t)\geqslant 0$,则对 $0<v<1$, 且 $\mu=1-v$ 有 $D^{\mu}g(t)=D^{\mu}(g_1(t)-g_2(t))=D^{\mu}g_1(t)-D^{\mu}g_2(t)$。因为 $g_1(t)$、$g_2(t)$ 为单调增加函数,所以由引理 2 得${}_0$

$D_t^{-v}g_1(t)$，${}_0D_t^{-v}g_2(t)$在$[0,A]$上单调递增。由实变函数知识得，${}_0D_t^{-v}g_1(t)$，${}_0D_t^{-v}g_2(t)$几乎处处存在微分，所以$D^{\mu}g(t)$在$[0,A]$几乎处处存在，又$D^{\mu}f(0)$在$[0,A]$存在，所以$D^{\mu}f(t)=D^{\mu}g(t)+D^{\mu}f(0)$在$[0,A]$上几乎处处存在。

2 康托 m 等份函数

现用以上两个引理及其推论来分析下面的所构造的一类分形函数的分析性质：即连续性、分数阶可积性与分数阶可微性。

2.1 构造一类称之为康托 m 等份函数 $\Phi(x)$

这里取m为奇数且$m\geqslant 3$，把$[0,1]m$等份。因为m为奇数，所以可以保留两端点处的闭区间，即保留$\left[0,\frac{1}{m}\right]$、$\left[\frac{m-1}{m},1\right]$。然后把中间间隔的$\frac{m-1}{2}$个开区间挖去，所得集合称为$E_1$；然后再把$E_1$中保留下来的每个闭区间，按上面的步骤，再等份$m$等份；再保留两端区间，将中间间隔的$\frac{m-1}{2}$个开区间挖去，所得集设为$E_2$；一直按照该步骤进行下去，设最终所得的集合为$E$[3,4]。

现在讨论第k步中挖去的开区间的并：

第k步：$\left(\frac{1}{m^k},\frac{2}{m^k}\right)\cup\left(\frac{3}{m^k},\frac{4}{m^k}\right)\cup\cdots\cup\left(\frac{m-2}{m^k},\frac{m-1}{m^k}\right)\cup\left(\frac{2m+1}{m^k},\frac{2m+2}{m^k}\right)\cup\cdots\cup\left(\frac{(m^{k-1}-1)m+1}{m^k},\frac{(m^{k-1}-1)m+2}{m^k}\right)\cup\cdots\cup\left(\frac{m^k-2}{m^k},\frac{m^k-1}{m^k}\right)\cdots$。

依次步骤继续下去，当$k\to\infty$时，得到一个新集合$F=[0,1]-E$

下面定义函数$\Phi(x)$，那么第k步取值如下：

$$\begin{cases}\frac{2}{m^k}, & x\in\left(\frac{1}{m^k},\frac{2}{m^k}\right)\\ \frac{4}{m^k}, & x\in\left(\frac{3}{m^k},\frac{4}{m^k}\right)\\ \frac{m-1}{m^k}, & x\in\left(\frac{m-2}{m^k},\frac{m-1}{m^k}\right)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{2m+2}{m^k}, & x\in\left(\frac{2m+1}{m^k},\frac{2m+2}{m^k}\right)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{(m^{k-1}-1)m+2}{m^k}, & x\in\left(\frac{(m^{k-1}-1)m+1}{m^k},\frac{(m^{k-1}-1)m+2}{m^k}\right)\\ \vdots & \vdots\\ \frac{m^k-1}{m^k} & x\in\left(\frac{m^k-2}{m^k},\frac{m^k-1}{m^k}\right)\end{cases}$$

当$k\to\infty$时，$\frac{m^k-1}{m^k}\to 1$且令$\Phi(0)=0$、$\Phi(1)=1$、$\Phi(x)=\sup\limits_{\substack{t\leqslant x\\ x\in F}}\Phi(t)$。

2.2 函数 $\Phi(x)$ 的分析性质

定理1 （连续性）函数$\Phi(x)$在$[0,1]$是几乎处处连续的。

证明 只要证明不连续点集为可数集，不妨对第k组步骤进行讨论。任取一挖去的开区间为$\left(\frac{i}{m^k},\frac{i+1}{m^k}\right)$，则其左边保留下来的闭区间为$\left[\frac{i-1}{m^k},\frac{i}{m^k}\right]$，则再进行第$k+1$，第$k+2$，…，第$k+n$，…步的操作得$\frac{i}{m^k}-\frac{1}{m^{k+1}}=\frac{mi-1}{m^{k+1}}$，

$$\frac{i}{m^k}-\frac{1}{m^{k+2}}=\frac{m^2i-1}{m^{k+2}},\cdots\frac{i}{m^k}-\frac{1}{m^{k+n}}=\frac{m^ni-1}{m^{k+n}},\cdots。$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{i}{m^k}-\frac{1}{m^{k+n}}\right)=\frac{i}{m^k}$，当$\lim\limits_{x\to\frac{i}{m^k}^-}\Phi(x)=\frac{i}{m^k}$。同样：$\lim\limits_{x\to\frac{i}{m^k}^+}\Phi(x)=\frac{i+1}{m^k}$，所以点$\frac{i}{m^k}$处，$\Phi(x)$是跳跃间断点。事实上：在$\left[\frac{i-1}{m^k},\frac{i}{m^k}\right]$基础上，进行第$k+1$步操作，则最大函数值为：$\frac{i-1}{m^k}+\frac{m-1}{m^{k+1}}$，再进行第$(k+2)$步，

其最大函数值为:$\frac{i-1}{m^k}+\frac{m-1}{m^{k+2}}$,依次再进行下去到第$(k+n)$步:$\frac{i}{m^k}+\frac{m-1}{m^{k+n}}$,所以$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{i}{m^k}+\frac{m-1}{m^{k+n}}\right)=\frac{i}{m^k}$,而$\frac{i}{m^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{i-1}{m^k}+\frac{i+1}{m^k}\right)$,所以其所有间断点可以排列成形如下面的无穷序列的形式:

$$\frac{1}{m},\frac{2}{m},\frac{3}{m},\cdots,\frac{m-1}{m},\frac{1}{m^2},\frac{2}{m^2},\cdots,\frac{m-1}{m^2},\frac{2m+1}{m^2},$$

$$\cdots,\frac{2m+2}{m^2},\cdots,\frac{2m+(m-1)}{m^2},\frac{2m+(m-2)}{m^2},\frac{4m+1}{m^2},$$

$\cdots,\frac{m^k-2}{m^k},\frac{m^k-1}{m^k},\cdots$,所以该集合为可数集,且测度为0,所以所有间断点的集是可数集,则测度为0。由实变函数知识得。所以$\Phi(x)$在[0,1]几乎处处连续。

定理2　(可积性)函数$\Phi(x)$为康托m等边函数,则对于$0<\nu<1$与$0<\mu<1$,$\Phi(x)$在[0,1]上存在ν阶分数阶积分。

证明　因为函数$\Phi(x)$在[0,1]上单调不减且几乎处处连续函数,所以由引理1、引理2得该函数$\Phi(x)$的分数阶积分${}_0D_t^{-\nu}\Phi(x)$在[0,1]也是几乎处处连续且单调递增的函数,所以由积分的知识得,$\Phi(x)$在[0,1]存在分数阶积分(也可以通过$\Phi(x)$在[0,1]是单增的有界变差函数且间断点是第一类间断点,所以由实变函数知识得$\Phi(x)$在[0,1]可积来证明)。

定理3　(可微性)函数$\Phi(x)$为康托m等份函数则对$0<\nu<1$与$0<\mu<1$,则$\Phi(x)$在[0,1]几乎处处存在μ阶分数阶微分。

证明　由构造函数$\Phi(x)$的步骤,得$\Phi(x)$的全变差$V_0^1\Phi(x)\leqslant 1$,所以函数$\Phi(x)$是有界变差函数,由推论得$\Phi(x)$在[0,1]几乎处处存在分数阶微分,即$D^\mu\Phi(x)$在[0,1]上几乎处处存在。

4　结论

本文利用分数阶微积分这个工具来研究康托m等份函数的分析性质。首先,专门规定m取奇数的方法来构造出分形集,并且在分形集上定义了一类新的分形函数即康托m等份函数。其次,研究了该函数的连续性即该函数在[0,1]上是几乎处处连续的。最后,用不同于经典微积分的分数阶微积分讨论了该函数是可积的和可微的。这些结论在理论上是严格的。

参　考　文　献

1　冯志刚,田立新,余　跃. 不同尺度下分形插值函数的积分. 江苏大学学报(自然科学版),2004;25(1):56—59

2　Barnsley M F. Fractal functions and interpolation. Construction Approximation,1986;2:303—329

3　肯尼思·法尔科内. 分形几何—数学基础及其应用(英)曾文曲,等译. 长春:东北大学出版社,2001;9

4　谢和平,薛秀谦. 分形应用中的数学基础方法. 北京:科学出版社,1997

Fractional Rank Calculus and Differential Coefficient of a Kind of Fractal Set

PAN Xue-zai

(Mathematics Department of Taizhou College,Nanjing Normal University,Taizhou 225300,P. R. China)

[**Abstract**]　Fractals belong to unline science,and creating fractals sets is one of ways through which study fractals theory. The thesis mainly discuss a new fractal set's (It is called Cantor m divided into equal parts function.) continuous property,monotone property,integrabel property and differentiability by applying the concept and properties of fraction rank calculous. It illustrates function $\Phi(x)$. continous almost everywhere on[0,1];exists v-frc-tion rank calculous on[0,1] and exists fraction rank differential coedfficient almost everywhere[0,1].

[**Key words**]　fractional rank calculous　　fractional rank differential coefficient　　Cantor m divided into equal parts function