第 10 卷　第 9 期　2010 年 3 月
1671-1815(2010)09-2049-03
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10　No. 9　Mar. 2010
© 2010　Sci. Tech. Engng.

线性回归模型 LIU 估计的影响分析

张莉莉　张尚立

(北京交通大学理学院,北京 100044)

摘　要　研究了线性模型中 LIU 估计的影响分析问题,得到了原模型与数据删除、方差扰动及均值漂移模型间——线性回归有偏估计(LIU)估计的关系式,给出了影响度量的计算公式。

关键词　线性回归模型　LIU 估计　广义 cook 距离　影响分析

中图法分类号　O212.4;　**文献标志码**　A

考虑线性回归模型

$$Y = X\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I_n) \qquad (1)$$

式(1)中 Y 是 $n \times 1$ 观测变量,X 是 $n \times p$ 的列满秩矩阵(即 $R(X) = p$),β 是 $p \times 1$ 的未知参数,ε 是 $n \times 1$ 随机误差。线性回归模型中未知参数 β 的最小二乘估计(LS)一直以来倍受重视。但当设计的矩阵病态时,LS 估计的精度很差,为了克服这种弊端,β 的有偏估计受到了统计学家的关注,例如岭估计。在文献[1]中,K. J. LIU 提出了一种新的有偏估计——LIU 估计:

$$\hat{\beta}(d) = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI)\hat{\beta}。$$

式中 $\hat{\beta}$ 是 β 的 LS 估计。

研究 LIU 估计的文献有很多,其中文献[2]研究了广义 LIU 估计及其优良性,指出了 LIU 估计是线性模型最小二乘估计的有偏估计,它是可容许估计且局部优于最小二乘估计。文献[3—5]分别讨论了不同模型下各种估计的影响分析问题。本文中我们主要研究 LIU 估计的影响分析问题,得到不同模型下 LIU 估计的影响度量式。

本文中考虑下面的模型:

数据删除模型:

$$Y_{[i]} = X'_{[i]}\beta + \varepsilon_{[i]}, \varepsilon_{[i]} \sim (0, \sigma^2 I_{n-1}) \qquad (2)$$

方差扰动模型:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim (0, \sigma^2 G^{-1}) \qquad (3)$$

2010 年 1 月 28 日收到　国家自然科学基金(60736047)资助

均值漂移模型:

$$Y = X\beta + D\gamma + \varepsilon, \varepsilon \sim (0, \sigma^2 I_n) \qquad (4)$$

为了度量在不同模型对 LIU 估计的影响程度,类似 cook 距离,我们定义广义 cook 距离

$$D(M, c) = (\hat{\beta}_d(f) - \hat{\beta}_d)'M(\hat{\beta}_d(f) - \hat{\beta}_d)/c \qquad (5)$$

式(5)中,$\hat{\beta}_d(f)$ 代表模型式(3),式(4),式(5)的 LIU 估计,$\hat{\beta}_d$ 代表原模型式(1)的 LIU 估计。

引理 1[6]**:** 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix}$ 可逆。若 $|A_{11}| \neq 0$,则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_{22.1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22.1}^{-1} \\ -A_{22.1}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22.1}^{-1} \end{pmatrix}。$$

若 $|A_{22}| \neq 0$,则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \\ A_{21} A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11.2}^{-1} & -A_{11.2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11.2}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}A_{11.2}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}。$$

其中:$A_{22.1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$,$A_{11.2} = A_{11} - A_{12} \times A_{22}^{-1}A_{21}$。

引理 2[6]**:** 若 A 与 $(A + BCD)$ 均可逆,则

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)CA^{-1}。$$

定理 1: 模型式(2)的 LIU 估计 $\hat{\beta}_d(i)$ 与 $\hat{\beta}_d$ 有如下关系:

$$\hat{\beta}_d(i) = \hat{\beta}_d - \frac{(X'X + I)^{-1}(X'X + dI)(X'X)^{-1}x_i\hat{e}'_i}{1 - h_{ii}} +$$

$$\frac{(X'X+I)^{-1}x_ix'_i\hat{\beta}_d}{1-\bar{h}_{ii}}+\frac{(X'X+I)^{-1}x_i(h_{ii}y'_i-x'_i\hat{\beta})}{(1-\bar{h}_{ii})(1-h_{ii})}-\frac{(X'X+I)^{-1}x_ix'_i(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)(X'X)^{-1}x_i\hat{e}'_i}{(1-\bar{h}_{ii})(1-h_{ii})} \tag{6}$$

式(6)中 $\bar{h}_{ii}=x'_i(X'X+I)^{-1}x_i$，$h_{ii}=x'_i(X'X)^{-1}x_i$，$\hat{e}'_i=y'_i-x'_i\hat{\beta}$。

且若在式(6)中取 $M=(X'X+I)$，$c=\sigma^2$，则有

$$D(M,c)=\frac{(\hat{\beta}_d(i)-\hat{\beta}_d)'M(\hat{\beta}_d(i)-\hat{\beta}_d)}{c}=\Big[-\frac{\hat{e}_ix'_i(X'X)^{-1}(X'X+dI)}{1-h_{ii}}+\frac{\hat{\beta}'_dx_ix'_i}{1-\bar{h}_{ii}}+\frac{(h_{ii}y_i-\hat{\beta}'x_i)x'_i}{(1-\bar{h}_{ii})(1-h_{ii})}-\{\hat{e}_ix'_i(X'X)^{-1}(X'X+dI)(X'X+I)^{-1}x'_ix_i\}\times\{(1-\bar{h}_{ii})(1-h_{ii})\}^{-1}\Big]\times\frac{(X'X+I)^{-1}}{\sigma^2}\Big[-\frac{(X'X+dI)(X'X)^{-1}x_i\hat{e}'_i}{1-h_{ii}}+\frac{x_ix'_i\hat{\beta}_d}{1-\bar{h}_{ii}}+\frac{x_i(h_{ii}y'_i-x'_i\hat{\beta})}{(1-\bar{h}_{ii})(1-h_{ii})}-\frac{x_ix'_i(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)(X'X)^{-1}x_i\hat{e}'_i}{(1-\bar{h}_{ii})(1-h_{ii})}\Big] \tag{7}$$

证明：根据LIU估计的定义可得到模型式(2)的LIU估计

$$\hat{\beta}_d(i)=(X'_{[i]}X_{[i]}+I)^{-1}(X'_{[i]}X_{[i]}+dI)(X'_{[i]}X_{[i]})^{-1}X'_{[i]}Y_{[i]} \tag{8}$$

注意到：

$$X'_{[i]}X_{[i]}=X'X-x_ix'_i,\ X'_{[i]}Y_{[i]}=X'Y-x_iy'_i,\ (X'_{[i]}X_{[i]}+dI)=(X'X+dI)-x_ix'_i \tag{9}$$

根据引理2，可以得到

$$(X'_{[i]}X_{[i]}+I)^{-1}=(X'X+I-x_ix'_i)^{-1}=(X'X+I)^{-1}+(X'X+I)^{-1}x_i(1-x'_i(X'X+I)^{-1}x_i)^{-1}x'_i(X'X+I)^{-1} \tag{10}$$

$$(X'_{[i]}X_{[i]})^{-1}=(X'X-x_ix'_i)^{-1}=(X'X)^{-1}+(X'X)^{-1}x_i(1-x'_i(X'X)^{-1}x_i)^{-1}\times x'_i(X'X)^{-1} \tag{11}$$

将式(9)、式(10)、式(11)代入式(8)并整理，可以得出式(6)，在式(5)中将 $\hat{\beta}_d(f)$ 用 $\hat{\beta}_d(i)$ 代替并取 $M=(X'X+I)$，$c=\sigma^2$，可以推出式(7)，证毕。

定理2：模型式(3)的LIU估计 $\hat{\beta}_d(G)$ 与 $\hat{\beta}_d$ 有如下关系

$$\hat{\beta}_d(G)=\hat{\beta}_d+(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)(X'X)^{-1}X'\bar{G}(I-H\bar{G})^{-1}\hat{e}+(X'X+I)^{-1}X'\bar{G}(I-H_1\bar{G})^{-1}X(\hat{\beta}_d-\hat{\beta})+(X'X+I)^{-1}X'\bar{G}(I-H_1\bar{G})^{-1}(H-H_2)\bar{G}(I-H\bar{G})^{-1}\hat{e} \tag{12}$$

式(12)中：$\hat{\beta}_d=(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)(X'X)^{-1}X'Y$，$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$，$H=X(X'X)^{-1}X'$，$H_1=X(X'X+I)^{-1}\times X'$，$H_2=X(X'X+I)^{-1}(X'X+dI)(X'X)^{-1}X'$，$\hat{e}=Y-X\hat{\beta}$，$\bar{G}=I-G$。

若在式(5)中取 $M=(X'X+I)$，$c=\sigma^2$，则有

$$D(M,c)=\frac{(\hat{\beta}_d(G)-\hat{\beta}_d)'M(\hat{\beta}_d(G)-\hat{\beta}_d)}{c}=[\hat{e}'(I-H\bar{G})^{-1}\bar{G}X(X'X)^{-1}(X'X+dI)+(\hat{\beta}_d-\hat{\beta})'X'(I-H_1\bar{G})^{-1}\bar{G}X+\hat{e}'(I-H\bar{G})^{-1}\bar{G}(H-H_2)(I-H\bar{G})^{-1}\bar{G}X]\frac{(X'X+I)^{-1}}{\sigma^2}[(X'X+dI)(X'X)^{-1}X'\bar{G}(I-H\bar{G})^{-1}\hat{e}+X'\bar{G}(I-H_1\bar{G})^{-1}(H-H_2)\bar{G}(I-H\bar{G})^{-1}\hat{e}+X'\bar{G}(I-H_1\bar{G})^{-1}X(\hat{\beta}_d-\hat{\beta})] \tag{13}$$

证明：由LIU估计的定义得到模型式(3)的LIU估计

$$\hat{\beta}_d(G)=(X'GX+I)^{-1}(X'GX+dI)(X'GX)^{-1}X'GY \tag{14}$$

记 $\bar{G}=I-G$，$H=X(X'X)^{-1}X'$，$H_1=X(X'X+I)^{-1}X'$，由引理2得到

$$(X'X+I-X'\bar{G}X)^{-1}=(X'X+I)^{-1}+(X'X+I)^{-1}X'\bar{G}(I-X(X'X+I)^{-1}X'\bar{G})^{-1}X(X'X+I)^{-1}X \tag{15}$$

$$(X'X-X'\bar{G}X)^{-1}=(X'X)^{-1}+(X'X)^{-1}X'\bar{G}(I-X(X'X)^{-1}X'\bar{G})^{-1}X(X'X)^{-1} \tag{16}$$

注意到

$$I+(I-H\bar{G})^{-1}H\bar{G}=(I-H\bar{G})^{-1},\quad I+(I-H_1\bar{G})^{-1}H_1\bar{G}=(I-H_1\bar{G})^{-1} \tag{17}$$

将式(15)、式(16)、式(17)代入式(14)并整理得到式(12)，在式(5)中将 $\hat{\beta}_d(f)$ 用 $\hat{\beta}_d(G)$ 代替得到式(13)，证毕。

定理3：模型式(4)的LIU估计 $\hat{\beta}_d(\gamma)$ 与 $\hat{\beta}_d$ 有如下关系

$$\hat{\beta}_d(\gamma)=\hat{\beta}_d+d(X'X+I_p)^{-1}(X'X)^{-1}X'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}D'\hat{e}+(X'X+I_p)^{-1}X'D(2I_r-$$

$$D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}D'X(\hat{\beta}_d-\hat{\beta})-(d-1)\times (X'X+I_p)^{-1}X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}\times D'X(X'X+I_p)^{-1}(X'X)^{-1}X'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}\times X'D)^{-1}D'\hat{e}+(X'X+I_p)^{-1}X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}[D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D-(d+1)I_r]\times (I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}D'\hat{e} \tag{18}$$

若在式(5)中取 $M=(X'X+I_p)$，$c=\sigma^2$，则有

$$D(M,c)=\frac{(\hat{\beta}_d(\gamma)-\hat{\beta}_d)'M(\hat{\beta}_d(\gamma)-\hat{\beta}_d)}{c}=$$

$$\{d\hat{e}'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}D'X(X'\times X)^{-1}+(\hat{\beta}_d-\hat{\beta})'X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}D'X-(d-1)\hat{e}'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}D'X(X'X)^{-1}(X'X+I_p)^{-1}X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}D'X+\hat{e}'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}[D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D-(d+1)I_r](2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}D'X)^{-1}X'D\}\frac{(X'X+I_p)^{-1}}{\sigma^2}\{d(X'\times X)^{-1}X'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}\times X'D)^{-1}D'\hat{e}+X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}\times D'X(\hat{\beta}_d-\hat{\beta})-(d-1)X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}\times X'D)^{-1}D'X(X'X+I_p)^{-1}(X'X)^{-1}X'D(I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}D'\hat{e}+X'D(2I_r-D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D)^{-1}[D'X(X'X+I_p)^{-1}X'D-(d+1)I_r]\times (I_r-D'X(X'X)^{-1}X'D)^{-1}D'\hat{e}\} \tag{19}$$

证明：记 $C=(X,D)$，$\alpha=\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\end{pmatrix}$，模型式(4)可写为

$$Y=C\alpha+\varepsilon \tag{20}$$

由 LIU 估计的定义得到模型式(20)的 LIU 估计为

$$\hat{\beta}_d(\gamma)=(C'C+I)^{-1}(C'C+dI)(C'C)^{-1}C'Y \tag{21}$$

将 $C=(X,D)$ 代入 C 并将其写成矩阵形式得到

$$\hat{\beta}_d(\gamma)=\begin{pmatrix}X'X+I_p & X'D\\ D'X & D'D+I_r\end{pmatrix}^{-1}\times \begin{pmatrix}X'X+dI_p & X'D\\ D'X & D'D+dI_r\end{pmatrix}\times \begin{pmatrix}X'X & X'D\\ D'X & D'D\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X'\\ D'\end{pmatrix}Y \tag{22}$$

应用引理 1 将 $\hat{\beta}_d(\gamma)$ 展开并整理得到式(18)，在式(5)中将 $\hat{\beta}_d(f)$ 用 $\hat{\beta}_d(\gamma)$ 代替得到式(19)，证毕。

参 考 文 献

1 Liu K J. A new class of biased estimate in linear regression. Comm In Stat, 1993; 22(3):393—402

2 陈德英，张尚立. 广义 LIU 估计及其优良性，科学技术与工程，2008;8(12):3272—3274

3 林　路. 协方差阵扰动模型岭估计的影响分析. 工程数学学报，1995,12(3):83—88

4 王　铭，石　磊. 协方差分析模型的影响分析. 云南大学学报，2003;25(5):391—394

5 张尚立，覃　红. 约束条件下线性模型协方差阵扰动的影响分析. 数学物理学报，2006;26A(4):621—628

6 王松桂. 线性模型理论及其应用. 合肥：安徽教育出版社，1987

Influence Analysis on Liu Estimator in the Linear Regression Model

ZHANG Li-li, ZHANG Shang-li

(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, P. R. China)

[**Abstract**] The influence analysis on Liu estimator in the linear regression model will be studied and derived the relations of Liu estimate between original linear model and data deletion model, variance perturbation model, mean-shift model, the formulas are given which measure the influence.

[**Key words**] linear regression model　Liu estimate　generalized cook distance　influence analysis