第 10 卷 第 18 期 2010 年 6 月
1671-1815(2010)18-4355-03
科 学 技 术 与 工 程
Scie nce Technology and Engineering
Vol. 10 No. 18 June 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

论 文

数 学

粗糙群中元素的阶及粗糙循环群

刘兴祥
(延安大学数学与计算机科学学院,延安 716000)

摘 要 对粗糙集上代数结构进行了研究,引入了粗糙群中元素的的阶、粗糙循环群等概念,利用粗糙集理论方法和经典代数的处理手段,讨论了粗糙循环群的结构特征和性质。

关键词 粗糙群中元素的阶 粗糙循环群 粗糙集合
中图法分类号 O152; **文献标志码** A

代数学是研究带有一些运算符号的集合所组成的代数系统及其相关性质. 同时,代数系统与计算机科学的发展与应用也有着不可分割的联系,这使其成为一个有着广泛应用领域的数学学科.

另一方面,粗糙集理论自 Z. Pawlak 在 1982 年在文献[1]中首次提出后,由于其有着很强的定性分析能力,为研究不精确或不确定的数据分析,推理、挖掘数据间的关系,利用不确定、不完备的经验知识进行推理,从而获得潜在知识等提供了行之有效的工具,所以在知识获取、决策分析等方面有着广泛的应用,并已渗透到信息科学、人工智能等学科领域(包括粗代数领域)。因此,代数系统与粗糙集理论的有机结合,应该对彼此的应用领域拓广是非常有益的。关于粗糙集理论的与代数系统的结合,已经有许多人做了大量的工作,取得了相当的进展。本文是在文献[2 ~6] 讨论“粗糙群、粗糙子群、粗糙群的陪集及粗糙群的不变子群、粗糙群的同态与同构”的基础上,给出了粗糙群的阶、粗糙循环群的定义,同时证明了与之相关的性质。

2010 年 1 月 25 日收到

第一作者简介:刘兴祥,男,硕士研究生导师,副教授。研究方向:粗糙代数。

1 预备知识

首先回顾几个熟悉的概念和结论。

定义 1.1[2] 设 U 是一个非空有限集合, R 是 U 上的一族等价关系,则 $S = (U,R)$ 称为近似空间,而 U 则称为一个论域。

一个近似空间也称为知识库,一种知识就是对于论域的一种划分,从而一种知识对应一种等价关系。

定义 1.2[2] 设 U 是一个论域, R 是定义在 U 上的任意一个等价关系,则由 R 产生的一个划分为 $\{[x]_R | x \in U\}$,记作 $\dfrac{U}{R}$,其中 $[x]_R$ 是指包含 $x(x \in U)$ 的一个等价类, $[x]_R$ 也称为一个基本集合。特别地,Φ 也称为 U 的一个基本集合。

定义 1.3[2] 设 $S = (U,\mathscr{R})$ 是一个近似空间, $\Phi \neq X \subseteq U$,R 是 U 上的任意一个等价关系,则集合 $\overline{X} = \{x \in U | [x]_R \cap X \neq \Phi\}$,$\underline{X} = \{x \in U | [x]_R \subseteq X\}$,$BN(X) = \overline{X} - \underline{X}$ 分别称为 X 的上近似、下近似和边界, X 称为近似空间 $S = (U,\mathscr{R})$ 中的粗糙集合。

设 $S = (U,\mathscr{R})$ 是一个近似空间, $\odot$ 是定义在

U 上的二元关系。以下文中所讨论的 G,G_1,G_2 均为近似空间 $S=(U,\mathscr{R})$ 中的子集合。

定义 1.4[1] 设 $S=(U,\mathscr{R})$ 是一个近似空间，$\Phi\neq G\subseteq U$,有一个二元运算(在此称为粗糙加法)的粗代数系统$(G,\odot)$若满足下列条件,则称为一个粗糙群。

(1) $\forall x,y\in G,x\odot y\in\overline{G}$(粗糙加法满足封闭性);

(2) $\forall x,y,z\in G$, 有 $(x\odot y)\odot z=x\odot(y\odot z)$(粗糙加法满足结合律);

(3) $\exists e\in\overline{G}$, 使得 $\forall x\in G$ 有 $x\odot e=e\odot x=x$(粗糙加法单位元存在);

(4) $\forall x\in G,\exists y\in G$, 使得 $x\odot y=y\odot x=e$, 这里 y 称为 x 的逆元,记作 x^{-1}。

定义 1.5 粗糙群 G 的非空粗糙子集 H 若满足下列条件,则称 H 为 G 的粗糙子群(记作 $H\leqslant G$)。

(1) $H\subseteq G$;

(2) H 关于 U 上的二元运算构成粗糙群。

定理 1.1 非空粗糙子集 H 是 G 的粗糙子群的充分必要条件是:

(1) $H\subseteq G$;

(2) $\forall x,y\in H,\exists y^{-1}\in H$, 有 $x\odot y^{-1}\in H$。

设 $S_1=(U_1,\mathscr{R}_1)$,$S_2=(U_2,\mathscr{R}_2)$ 为两个近似空间,$\odot$ 和 $*$ 分别为定义在 U_1,U_2 上的二元运算。

定义 1.6 设 $G_1\subseteq U_1,G_2\subseteq U_2$, 假如存在粗糙映射 $\varphi:\overline{G}_1\to\overline{G}_2$, 使得

$\forall x_1,y_1\in\overline{G}_1,\varphi(x_1\odot y_1)=\varphi(x_1)*\varphi(y_1)$。

则称 φ 是粗糙集合 $\overline{G_1}$ 与粗糙集合 $\overline{G}_2$ 间的同态映射。当 φ 还是粗糙单射(或满射)时,则 φ 是粗糙集合 $\overline{G}_1$ 与粗糙集合 $\overline{G}_2$ 间的粗糙单(或满)同态。

定义 1.7 设 $G_1\subseteq U_1,G_2\subseteq U_2$, 假如存在粗糙一一映射 $\varphi:\overline{G}_1\to\overline{G}_2$, 使得

$\forall x_1,y_1\in\overline{G}_1,\varphi(x_1\odot y_1)=\varphi(x_1)*\varphi(y_1)$。

则称 φ 是粗糙集合 $\overline{G_1}$ 与粗糙集合 $\overline{G}_2$ 间的一个同构映射。也称 $\overline{G}_1$ 与 $\overline{G}_2$ 为粗糙同构的粗糙集合,记作 $\overline{G_1}\cong_R\overline{G_2}$。

2 粗糙群的阶及粗糙循环群的主要结论

定义 2.1 在粗糙群 G 中, $\forall x\in G,m\in\mathbf{Z}$, 把 $\underbrace{x\odot x\odot\cdots\odot x}_{m}$ 记为 x^m。

定理 2.1 在粗糙群 G 中, $\forall x\in G,m,n\in\mathbf{Z}$ 有 $x^m\odot x^n=x^{m+n}$。

定义 2.2 设 G 是一个粗糙群, e 是粗糙群 G 的粗糙单位元, $x\in G$, 使得 $x^m=e$ 的最小正整数 m 称为元素 x 的粗糙阶(或 x 的粗糙周期),记为 $Rorda=m$, 若使 $x^m=e$ 的最小正整数 m 不存在,则称元素 x 的粗糙阶是无限阶的(或 x 的粗糙周期是无限阶的),记为 $Rorda=\infty$。

定理 2.2 设 G 是一个粗糙群, e 是粗糙群 G 的粗糙单位元, $x\in G,Rordx=m$, 则有

(1) $n\in\mathbf{Z},x^n=e$ 的充分必要条件是 $m|n$;

(2) $h,k\in\mathbf{Z},x^h=x^k$ 的充分必要条件是 $m|(h-k)$;

(3) $\forall r\in\mathbf{Z}$,则 $Rord(x^r)=\dfrac{m}{(m,r)}$。

证明 (1)设 $m|n$, 则 $n=mq$, 于是 $x^n=x^{mq}=(x^m)^q=e^q=e$, 反之,设 $x^n=e$ 且 $n=mq+r,0\leqslant r<m$, 则 $e=x^n=x^{mq+r}=(x^m)^qx^r=x^r$, 因为 $Rordx=m$, 所以 $r=0$, 从而 $n=mq$, 即 $m|n$。

(2)由(1)及定义 2.2 即得。

(3)首先 $(x^r)^{\frac{m}{(m,r)}}=(x^m)^{\frac{r}{(m,r)}}=e^{\frac{r}{(m,r)}}=e$, 所以 x^r 是有限阶的. 现设 $Rord(x^r)=n$, 则 $n\left|\dfrac{m}{(m,r)}\right.$, 而且 $(x^r)^n=e$, 即 $x^{rn}=e$, 由于 $Rordx=m$, 于是 $m|rn,\dfrac{m}{(m,r)}\left|\dfrac{r}{(m,r)}n\right.$, 然而 $\left(\dfrac{m}{(m,r)},\dfrac{r}{(m,r)}\right)=1$, 从而 $\dfrac{m}{(m,r)}\left|n\right.$, 因此 $n=\dfrac{m}{(m,r)}$。

定理 2.3 设 G 是一个粗糙群, e 是粗糙群 G 的粗糙单位元, $x\in G,Rordx=\infty$, 则有

(1) $n\in\mathbf{Z},x^n=e$ 的充分必要条件是 $n=0$;

(2) $h,k\in\mathbf{Z},x^h=x^k$ 的充分必要条件是 $h=k$;

(3) $\forall r\in\mathbf{Z}-\{0\}$, 有 $Rord(x^r)=\infty$。

证明 (1)、(2)由定义 2.2 即得。

(3)若 x^r 是有限阶的,设 $Rord(x^r)=n$, 则 $(x^r)^n=e$, 于是 $x^{rn}=e$, 这与 $Rordx=\infty$ 矛盾,因此 $Rord(x^r)=\infty$。

推论 1 设 G 是一个粗糙群, $x\in G$, 则 $Rordx=Rordx^{-1}$。

定理 2.4 若 $Rord(ab)=mn,Rorda=m$, $Rordb=n,(m,n)=1,ab=ba$,则 $Rord(ab)=mn$。

证明　因为 $(ab)^{mn} = (a^m)^m(b^n)^m = e$，所以 $Rord(ab)|mn$，设 $Rord(ab) = k$，则

$e = (ab)^{kn} = a^{kn}b^{kn} = a^{kn}$，从而 $m|kn$，又因为 $(m,n) = 1$，所以 $m|k$，同理可得 $n|k$。再利用 $(m,n) = 1$ 可得 $mn|k$，即 $mn|Rord(ab)$。因此 $Rord(ab) = mn$。

定义 2.3　设 G 是一个粗糙群，e 是粗糙群 G 的粗糙单位元，$x \in G$，若 $\forall y \in G$，$\exists n \in \mathbf{Z}$，使得 $y = x^n$，则称粗糙群 G 是由 x 生成的粗糙循环群，x 是粗糙群 G 的一个粗糙生成元，记作 $G = (x)$。当 G 的元素个数无限时，称 G 为无限粗糙循环群；当 G 的元素个数为 n 时，称 G 为 n 阶粗糙循环群。

定理 2.5　设 G 为粗糙循环群。

(1) 如果 $G = (x)$ 是无限粗糙循环群，则 $\overline{G} \cong_R (Z, +)$；

(2) 如果 $G = (x)$ 是有限粗糙循环群，则 $\overline{G} \cong_R (Z_n, +)$。

证明　(1)令 $\varphi: Z \to \overline{G}$，即 $\forall k \in \mathbf{Z}$，有 $\varphi(k) = x^k$，显然 φ 是 Z 到 $\overline{G}$ 的粗糙一一映射，且 $\forall k,l \in \mathbf{Z}$，$\varphi(k+l) = x^{k+l} = x^k \odot x^l = \varphi(k) \odot \varphi(l)$，则 φ 是 Z 到 $\overline{G}$ 的粗糙同构映射，即 $\overline{G} \cong_R (Z, +)$。

(2)同理可证。

推论 2　设 $G = (x)$ 是一个粗糙循环群，e 是粗糙群 G 的粗糙单位元，则有

(1)若 $Rordx = m$，则 G 是含有 m 个元素的有限粗糙循环群，且 $G = \{e = x^0, x^1, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$；

(2)若 $Rordx = \infty$，则 G 是无限粗糙循环群，且 $G = \{\cdots, x^{-2}, x^{-1}, , x^0, x^1, x^2, \cdots\}$。

定理 2.6　设 $G = (x)$ 是一个粗糙循环群，e 是粗糙群 G 的粗糙单位元，则有

(1)若 $Rordx = m$，则 G 有 $\varphi(m)$（表示小于 m 且与 m 互质的正整数的个数）形式为 x^r 的粗糙生成元且 $(r,m) = 1$；

(2)若 $Rordx = \infty$，则 G 有两个粗糙生成元：x, x^{-1}。

推论 3　设 $G = (x)$ 是一个 m 阶的粗糙循环群，则 x^r 是 G 的粗糙生成元的充分必要条件是 $Rord(x^r) = m$。

推论 4　设 p 是质数，则 p 阶粗糙循环群 $G = (x)$ 有 $p-1$ 个粗糙生成元。

推论 5　粗糙循环群的任一子群也是粗糙循环群。

参 考 文 献

1 Pawlak Z, Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982; 11: 341—356

2 Biswas R, Nanda S. Rough groups and rough subgroups. Bull Polin Acad Sci Math, 1994; 42; 251—254

3 韩素青. 粗糙群的同态与同构. 山西大学学报, 2001; 24(4): 303—305

4 韩素青. 粗糙陪集、粗糙不变子群. 计算机科学, 2001; 28: 76—77

5 于佳丽, 舒　兰. 粗糙商群的性质. 模式识别与人工智能, 2003; 16(1): 126—128

6 于佳丽, 舒　兰. 粗糙不变子群的性质. 模式识别与人工智能, 2006; 19(1): 24—26

Order of Element in Rough Group and Rough Cyclic Group

LIU Xing-xiang

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, P. R. China)

[**Abstract**] The algebraic structure of rough sets are studied. The concepts of Order of Element in Rough Group and Rough Cyclic Group are introduced. Their structure characteristics those of rough group are discussed and some good characters are produced and proved through the method of rough sets theory and the managing method in sutra algebra.

[**Key words**] order of element in rough group　　rough cyclic group　　rough sets