第 10 卷 第 14 期 2010 年 5 月
1671-1815(2010)14-3315-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 14 May 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

论 文

数 学

单个测度的 Renyi 维数

万 菁
(镇江机电高等职业学校,镇江 212016)

摘 要 随着社会的信息化,源于信息论测度的 Renyi 维数的研究引起了分形界的广泛关注。将举出反例对 $q<0$ 时 L. Olsen 所作出的关于单个 typical 测度的下 Renyi 维数的一个猜想进行否定。

关键词 概率测度 Jensen 不等式 Renyi 维数
中国法分类号 O174.12; **文献标志码** A

近年来,关于概率测度,自相似测度及像测度等相关问题的研究引起了人们的广泛关注[1—3]。这里我们主要考虑 R^d 空间一紧子集上的概率测度。

设 K 是 R^d 空间上的一个紧子集。以下 $B(x,r)=\{y\in R^d \mid |y-x|<r\}$。设 μ 是 K 上的概率测度,则 μ 的上、下 Renyi 维数可定义如下。令 $r>0$, $q\in R$,记

$$I_\mu(r;q)=\int_K \mu(B(x,r))^{q-1}\mathrm{d}\mu(x)\text{。}$$

则上、下 Renyi 维数可定义为

$$\overline{D}_\mu(q)=\limsup_{r\to 0}\frac{\lg I_\mu(r;q)}{-\lg r},$$

$$\underline{D}_\mu(q)=\liminf_{r\to 0}\frac{\lg I_\mu(r;q)}{-\lg r}\text{。}$$

研究 Renyi 维数的主要意义在于其与测度 μ 的多重分形谱之间的联系。这里我们将关于测度 μ 的局部维数的水平集的 Hausdorff 维数定义为关于测度 μ 的 Hausdorff 多重分形谱函数,记为 f_μ,即

$$f_\mu(\alpha)=\dim_H\left\{x\in R^d \mid \lim_{r\to 0}\frac{\lg\mu(B(x,r))}{\lg r}=\alpha\right\},\alpha\geqslant 0\text{。}$$

2010 年 1 月 7 日收到

回忆一下函数 $\varphi:R\to R$ 的 Legendre 变换 φ^* 的定义 $\varphi^*(x)=\inf_y(xy+\varphi(y))$。20 世纪 80 年代,物理学者们在文献[4,5]中给出了这样一个猜想:对一些"好"的测度,其 L^q- 维数的 Legendre 变换值与多重分形谱函数值存在以下两个相等关系:(1)上、下 L^q- 维数彼此相等;(2)多重分形谱函数值 $f_\mu(\alpha)$ 与上、下 L^q- 维数的 Legendre 变换值相等,即对所有的 $q\in R$ 和 $\alpha\geqslant 0$,有

$$\underline{D}_\mu(q)=\overline{D}_\mu(q)$$

和

$$f_\mu(\alpha)=\underline{D}_\mu^*(\alpha)=\overline{D}_\mu^*(\alpha)\text{。}$$

此猜想被称为 Multifractal Formalism。随后 20 世纪 90 年代数学界就掀起了一股验证 Multifractal Formalism 和计算测度的多重分形谱函数值的热潮,并在之后的八九年期间,计算出了能够说明欧几里德空间 R^d 上各类测度具有自相似性的多重分形谱的函数值。

研究单个测度的下 Renyi 维数与下计盒维数之间的大小关系。设 K 是欧氏空间 R^d 上的紧子集,那么由支撑在紧子集 K 上的所有 Borel 概率测度构成的集合称为概率测度族,简记 $P(K)$,其中 $P(K)$ 具有弱拓扑性。下面我们给出一些记号和定义。

令 $Lip(K)$ 表示由 Lipschitz 函数构成的族类,其中 Lipschitz 函数 $f:K \to R$ 满足 $|f| = 1$ 且函数 f 的 Lipschitz 常数 $Lip(f) \leqslant 1$ 。$P(K)$ 上距离 L 一般定义如下(参考文献[8,51 页,定理 6.8]),对 $\mu,\nu \in P(K)$,两者的距离 L 可定义为

$$L(\mu,\nu) = \sup_{f \in Lip(K)} \left| \int f\mathrm{d}\mu - \int f\mathrm{d}\nu \right| 。$$

有了上述定义后,对 $\mu \in P(K)$, $r > 0$,记 $B(\mu,r) = \{\nu \in P(K) | L(\mu,\nu) < r\}$ 表示以测度 μ 为中心, r 为半径的开球邻域。

称紧子集 K 上的单个 typical 测度具有性质 P ,如果所有不具有性质 P 的概率测度构成的集合,即

$$\{\mu \in P(K) | \mu \text{ 不具有性质 } P\}$$

是第一纲的。

在文献[6,7]中,L. Olsen 研究了 $q \geqslant 1$ 时单个 typical 测度的上、下 Renyi 维数。下面我们首先给出文献[7]中已有的有关 $q < 0$ 时单个 typical 测度的下 Renyi 维数的一个猜想。

猜想[7] 设 K 是欧氏空间 R^d 上的紧子集。当 $q < 0$ 时,单个 typical 测度 $\mu \in P(K)$ 满足

$$\underline{D}_{\mu}(q) = 0。$$

我们将举出反例来说明此猜想是错误的。

反例

设 μ 是 R^d 上的概率测度, q 是实数,记

$$M_{\mu}(r;q) = \inf_{\substack{(B(x_i,r))_i \text{is a centered} \\ \text{cover of } supp\,\mu}} \sum_i \mu(B(x_i,r))^q ,$$

其中 $supp\,\mu$ 表示测度 μ 的支撑。现令

$$\underline{\tau}_{\mu}(q) = \liminf_{r \to 0} \frac{\lg M_{\mu}(r;q)}{-\lg r},$$

$$\overline{\tau}_{\mu}(q) = \limsup_{r \to 0} \frac{\lg M_{\mu}(r;q)}{-\lg r}。$$

其中数 $\underline{\tau}_{\mu}(q)$ 和 $\overline{\tau}_{\mu}(q)$ 可以看作是 Renyi 维数 $\underline{D}_{\mu}(q)$ 和 $\overline{D}_{\mu}(q)$ 的盒维数形式。事实上,根据文献[9]可知如果 μ 是倍测度,对任意实数 q ,有 $\underline{\tau}_{\mu}(q) = \underline{D}_{\mu}(q)$ 和 $\overline{\tau}_{\mu}(q) = \overline{D}_{\mu}(q)$ 。当 $q < 0$ 时,函数 $t \to t^q$ 仍然是凹函数。类似地,根据 Jensen 不等式可得

$$\underline{\tau}_{\mu}(q) \geqslant (1 - q)\, \underline{\dim}_B(supp\,\mu)。$$

特别地,当 $q < 0$ 时,此不等式进一步可化为

$$\underline{\tau}_{\mu}(q) \geqslant \underline{\dim}_B(supp\,\mu) \tag{1}$$

然而,设 K 是欧氏空间 R^d 上的紧子集,单个 typical 测度 $\mu \in P(K)$ 满足

$$supp\,\mu = K^{[10]} \tag{2}$$

联合(1)式和(2)式可知,设 K 是欧氏空间 R^d 上的紧子集,那么当 $q < 0$ 时,单个 typical 测度 $\mu \in P(K)$ 满足

$$\underline{\tau}_{\mu}(q) \geqslant \underline{\dim}_B(supp\,\mu) = \underline{\dim}_B K \tag{3}$$

令 $K = [0,1]$ 和倍测度 $\mu \in P([0,1])$,再利用不等式(3)可得,可推出 $\underline{\tau}_{\mu}(q) \geqslant \underline{\dim}_B[0,1] = 1$。而当 $q < 0$ 时, $\underline{D}_{\mu}(q) = \underline{\tau}_{\mu}(q) \geqslant 1$ 与猜想矛盾。

参 考 文 献

1 Dai M F, Liu Z C. The quantization dimension and other dimesions of probability measures. International Journal of Nonlinear Science, 2008;5(3):267—274

2 Deng Q R. The absolute continuity of a family of self-similarity measures. International Journal of Nonlinear Science, 2008; 5(2): 178—183

3 Jiang Y, Dai M F. Image measures and statistical mechanical charaterizaition for their dimensions. International Journal of Nonlinear Science, 2007;3:32—39

4 Halsey T C, Jensen M H, Kadandoff L P, *et al*. Fractal measures and their singularities, the characterization of strange sets. Phys Rev A, 1986;33:1141—1151

5 Hentschel H, Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. Physica D, 1983;435—444

6 Olsen L. Typical L^q- dimensions of measures. Monatsh Math, 2005; 146:143—157

7 Olsen L. Typical apper L^q- dimensions of measures for $q \in [0,1]$. Bull Sci Math, 2008;7(132):551—561

8 Prathasarathy K R. Probability measures on metric spaces. Academic Press, 1967

9 Olsen L. Mixed generalized dimensions of self-similar measures. J Math Anal Appl, 2005;306:516—539

10 Myjak J, Rudnicki R. On the box dimension of typical measures. Monatsh Math, 2002;136:143—150

(下转第 3326 页)

单易用。

参 考 文 献

1 李凡华，刘慈群．含启动压力梯度的不定常渗流的压力动态分析．油气井测试，1997；6(1)：1—4

2 郭永存，卢德唐，曾清红，等．有启动压力梯度渗流的数学模型．中国科学技术大学学报，2005；35(4)：492—498

3 赵秀才，衣艳静，姚 军．两夹角不渗透断层对油井压力及压力导数的影响研究．断块油气田，2005；12(6)：41—43

4 张公社．试井解释中识别直线断层的新方法．江汉石油学院学报，1994；16(4)：58—63

5 程时清，徐论勋，张德超．低速非达西渗流试井典型曲线拟合法．石油勘探与开发，1996；23(4)：50—54

6 刘能强．实用现代试井解释方法．北京：石油工业出版社，2007：15—40

The Identification of the Type of "Upwarping" in the Pressure Derivative Curve by Using Second Pressure Derivative Method

SUN Qing-you[1,2], ZHANG Shao-hui[1], YIN Hong-jun[1], ZHOU Hong-liang[1]

(Key Laboratory of Enhanced Oil and Gas Recovery in the Ministry of Education, Northeast Petroleum University[1], Daqing 163318, P. R. China; No. 10 Oil Production Company of Daqing Oil Field Company Ltd.,[2], Daqing 164415, P. R. China)

[**Abstract**] The pressure derivative curve will upwarp because of the existence of the threshold pressure gradient and the fault. The identification of the type of "upwarping" in the pressure derivative curve is crucial to the selection of the well testing model. The theoretical basis of computing the second pressure derivative curve considering effects of the threshold pressure gradient and the fault was provided respectively. The pressure curve, the pressure derivative curve and the second derivative curve are drawn and their characteristics are analyzed. Then, the method—the second derivative method, which can identify the two types of "upwarping" due to the threshold pressure gradient and the fault, is provided. The analytical results show that this method is simple and practical, and can identify the two different types of "upwarping" effectively.

[**Key words**] mathematical model second pressure derivative method threshold pressure gradient fault

(上接第 3316 页)

The Renyi Dimensions for a Single Measure

WAN Jing

(Zhenjiang Vocational College of Mechanical and Electrical Technology, Zhenjiang 212016, P. R. China)

[**Abstract**] In recent years, as society's information, more and more people are interested in the Renyi dimension derived from information theory in the fractal community. The conjecture about the typical behavior of the lower Renyi dimension is mainly disfused for $q < 0$ by a counterexample.

[**Key words**] Probability measure Jensen inequality Renyi dimension