第10卷 第8期 2010年3月
1671-1815(2010)08-1936-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 8 Mar. 2010
ⓒ 2010 Sci. Tech. Engng.

梯形修正公式及其余项“中间点”的渐近性

何俊红
(宝鸡文理学院数学系,宝鸡 721007)

摘 要 给出了一种带端点导数的梯形修正公式,并给出了该公式的截断误差。分析了相应的复化求积公式的收敛阶,其收敛阶比复化梯形法提高了2阶;并通过对梯形修正公式余项的研究。讨论了该求积公式余项“中间点”的渐近性,使求积公式的代数精度得到进一步提高。

关键词 梯形修正公式 截断误差 收敛阶 渐近性

中图法分类号 O241.4; **文献标志码** A

在信息技术、系统工程等领域中,经常遇到计算积分的实际问题,而函数$f(x)$往往为列表形式,要得到积分的精确值很困难,必须采用数值积分求其近似值。因而研究和构造高精度、高收敛阶的数值积分公式是非常重要的。文献[1]对数值积分的矩形公式、梯形公式以及Simpson公式的余项进行了研究,得到了相应的数值积分校正公式。本文利用Taylor定理,给出一种带端点导数的梯形修正公式,它具有文献[2]求积公式的特点。其复化公式只比复化梯形公式多计算两个端点的一阶导数,但收敛阶却比复化梯形公式提高了2阶。最后通过对梯形修正公式余项的研究,给出了该求积公式余项“中间点”的渐近性,根据“中间点”的渐近性,对求积公式进一步修正,使其代数精度得到更好的改善。在实际应用中,可以更好地提高模型拟合的精度。

1 带端点导数的梯形修正公式及其截断误差

1.1 带端点导数的梯形修正公式

考虑积分$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,文献[3]给出的梯形公式

$$I(f)\approx T(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \tag{1}$$

具有1次代数精度,文献[1]给出的梯形校正公式

$$I(f)\approx TM(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\frac{(b-a)^3}{12}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2}$$

具有3次代数精度。将区间$[a,b]$ n等分,记$h=\dfrac{b-a}{n}$,$x_k=a+kh$,$(k=0,1,\cdots,n)$,$x_{k+\frac{1}{2}}=a+\left(k+\dfrac{1}{2}\right)h$,$(k=0,1,\cdots,n-1)$,则式(2)对应的复化梯形校正公式

$$TM_n(f)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)]-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(x_{k+\frac{1}{2}})$$

中含有每个子区间中点的2阶导数,计算量比较大。为减少计算量,希望修正后的梯形公式既具有较高的代数精度,又使修正后的高阶导数只含在区间的端点处,且系数互为相反数,以便复化时抵消。

设梯形修正公式具有如下形式[4]:

$$I(f)\approx TQ(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\lambda(b-a)^s[f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)] \tag{3}$$

由于式(1)的代数精度为1,而希望式(3)的代数精度大于1,可知$k<2$,取$k=1$,$s=2$,于是设

$$I(f)\approx TQ(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+$$

2009年12月9日收到 宝鸡文理学院院级重点项目(ZK2309)资助
作者简介:何俊红(1971—),女,陕西人,硕士,研究方向:数值计算与系统模拟。

$$\lambda(b-a)^2[f'(b)-f'(a)] \tag{4}$$

易验证式(4)对$f(x)=1,x$时精确成立,使式(4)对$f(x)=x^2$精确成立,得$\lambda=-\dfrac{1}{12}$,由此带端点导数的梯形修正公式为

$$I(f)\approx TQ(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)] \tag{5}$$

1.2　梯形修正公式的截断误差

记$TQ(f)$的截断误差为$RT(f)$,即$RT(f)=I(f)-TQ(f)$。

定理1　设$f(x)\in C^4[a,b]$,且对$\forall x\in[a,b]$,有$|f^{(4)}(x)|\leqslant M$,则梯形修正公式$TQ(f)$有3次代数精度,且

$$|RT(f)|\leqslant\frac{19h^5}{2\ 880}M。$$

证明　设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,记$x_0=\dfrac{a+b}{2}$,$h=b-a$,由Taylor公式

$$F(x)=F(x_0)+f(x_0)(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f'''(x_0)}{4!}(x-x_0)^4+\frac{f^{(4)}(\xi)}{5!}(x-x_0)^5。$$

其中ξ介于x_0与x之间。由于$b-x_0=\dfrac{h}{2}$,$a-x_0=-\dfrac{h}{2}$,有

$$I(f)=F(b)-F(a)=hf(x_0)+\frac{h^3}{24}f''(x_0)+\frac{h^5}{5!\ *2^5}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)] \tag{6}$$

式(6)中$\xi_1\in(a,x_0)$,$\xi_2\in(x_0,b)$。由Taylor公式

$$f(a)=f(x_0)-f'(x_0)\frac{h}{2}+\frac{f''(x_0)}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4,\xi_3\in(a,x_0),$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{2}+\frac{f''(x_0)}{2!}(\frac{h}{2})^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(\frac{h}{2})^3+\frac{f^{(4)}(\xi_4)}{4!}(\frac{h}{2})^4,\xi_4\in(x_0,b),$$

由此

$$hf(x_0)=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]-\left(\frac{h}{2}\right)^3f''(x_0)-\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^5[f^{(4)}(\xi_3)+f^{(4)}(\xi_4)] \tag{7}$$

由Taylor公式

$$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(4)}(\zeta)}{3!}(x-x_0)^3。$$

其中ζ介于x_0与x之间。于是

$$f''(x_0)=\frac{1}{h}[f'(b)-f'(a)]-\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2[f^{(4)}(\xi_5)+f^{(4)}(\xi_6)] \tag{8}$$

式(8)其中$\xi_5\in(a,x_0)$,$\xi_6\in(x_0,b)$. 将式(7)、式(8)代入式(6),得

$$I(f)=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]+\frac{1}{5!}\left(\frac{h}{2}\right)^5[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]-\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^5[f^{(4)}(\xi_3)+f^{(4)}(\xi_4)]+\frac{1}{3\times3!}\left(\frac{h}{2}\right)^5[f^{(4)}(\xi_5)+f^{(4)}(\xi_6)]。$$

所以$TQ(f)$有3次代数精度,且

$$|RT(f)|=|(f)-TQ(f)|\leqslant\left(\frac{h}{2}\right)^5\left(\frac{2}{5!}+\frac{2}{4!}+\frac{2}{3\times3!}\right)M=\frac{19h^5}{2\ 880}M。$$

2　复化梯形修正公式及其收敛阶

将区间$[a,b]$ n等分,记$h=\dfrac{b-a}{n}$,$x_k=a+kh$,$(k=0,1,\cdots,n)$,在每个子区间$[x_k,x_{k+1}]$上应用梯形修正公式,有

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x\approx T_k(f)=\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+$$

$$\frac{(h)^2}{12}[f'(x_k)-f'(x_{k+1})]。$$

从而

$$I(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n-1}T_k(f)=$$
$$\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)]+$$
$$\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]=T_n(f)。$$

由定理 1 可知

$$|RT_n(f)|=|I(f)-T_n(f)|=$$
$$\left|I(f)-\sum_{k=0}^{n-1}T_k(f)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{19h^5}{2\,880}M=$$
$$(b-a)\frac{19h^4}{2\,880}M。$$

复化梯形修正公式只比复化梯形公式多计算两个端点处的一阶导数,其收敛阶却至少达到 4 阶,这和复化 Simpson 公式的收敛阶相当,但比复化 Simpson 公式的计算量要小得多。

3 梯形修正公式余项“中间点”的渐近性

构造三次多项式 $H(x)$[5],使

$$H(a)=f(a),H(b)=f(b),H'(a)=f'(a),$$
$$H'(b)=f'(b),$$

由于梯形修正公式 $TQ(f)$ 有 3 次代数精度,有

$$\int_a^b H(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}[H(a)+H(b)]+$$
$$\frac{(b-a)^2}{12}[H'(a)-H'(b)]=TQ(f)。$$

所以余项 $RT(f)$ 也可表示为

$$RT(f)=I(f)-TQ(f)=\int_a^b[f(x)-H(x)]\mathrm{d}x=$$
$$\int_a^b\frac{f^{(4)}(\tau)}{4!}(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x$$

其中 $\tau\in(a,b)$,由积分中值定理,$\exists\eta\in(a,b)$,使

$$RT(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b(x-a)^2(x-b)^2\mathrm{d}x=$$
$$\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\eta)$$

于是

$$I(f)=TQ(f)+\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\eta)\qquad(9)$$

称式(9)中的点 η 为梯形修正公式 $TQ(f)$ 余项的“中间点”,称 $\lim\limits_{b\to a}\frac{\eta-a}{b-a}$ 的性态为求积余项“中间点”的渐近性[6]。

命题 1[7] 设函数 $f(x)\in C^{n+6}[a,b]$,且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处具有如下形式 $n+4$ 阶 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$
$$\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f^{(n+4)}(a)}{(n+4)!}(x-a)^{n+4}+$$
$$o[(x-a)^{n+4}]\qquad(10)$$

则 $f'''(x)=f'''(a)+\frac{f^{(n+4)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}+o[(x-a)^{n+1}]$。

定理 2 设函数 $f(x)\in C^{n+6}[a,b]$,且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处具有形如式(10)的 $n+4$ 阶 Peano 余项的 Taylor 公式,其中 $f^{(n+4)}(a)\neq0$,则对于梯形修正公式 $TQ(f)$ 余项的“中间点”η 成立。

$$\lim_{b\to a}\frac{\eta-a}{b-a}=\left[\frac{60}{(n+5)(n+4)(n+3)}\right]^{\frac{1}{n}},\text{ 其中 }n\geqslant1。$$

证明 根据式(9),利用洛必达法则

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_a^b f(x)dx-TQ(f)-\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(a)}{(b-a)^{n+5}}=$$
$$\frac{1}{720}\lim_{b\to a}\frac{f^{(4)}(\eta)-f^{(4)}(a)}{(\eta-a)^n}\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^n=$$
$$\frac{1}{720}\lim_{\eta\to a}\frac{f^{(4)}(\eta)-f^{(4)}(a)}{(\eta-a)^n}\cdot\lim_{b\to a}\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^n=$$
$$\frac{f^{(n+4)}(a)}{720n!}\lim_{b\to a}\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^n。$$

其中 $n\geqslant1$,利用洛必达法则,又

$$\lim_{b\to a}\left\{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-\right.$$
$$\left.f'(b)]-\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(a)\right\}/[(b-a)^{n+5}]=$$
$$\lim_{b\to a}\left\{\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]-\frac{(b-a)}{2}f'(b)-\frac{(b-a)}{6}[f'(a)-\right.$$
$$\left.f'(b)]+\frac{(b-a)^2}{12}f''(b)-\frac{5(b-a)^4}{720}f^{(4)}(a)\right\}/[(n+$$

$5)(b-a)^{n+4}] =$

$$\lim_{b\to a}\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{12}f^{(n+4)}(b)+\frac{(n+2)(b-a)}{6}f^{(n+5)}(b)+\frac{(b-a)^2}{12}f^{(n+6)}(b)\right\}/[(n+5)!] = \frac{(n+1)(n+2)}{12(n+5)!}f^{(n+4)}(a)。$$

因此

$$\lim_{b\to a}\frac{\eta-a}{b-a}=\left[\frac{60}{(n+5)(n+4)(n+3)}\right]^{\frac{1}{n}}，其中 n\geqslant 1。$$

令 $n=1$ 时，即得下面的结论.

推论 1 设函数 $f(x)\in C^7[a,b]$，且 $f^{(5)}(a)\neq 0$，则对于梯形修正公式余项的“中间点” η 成立

$$\lim_{b\to a}\frac{\eta-a}{b-a}=\frac{1}{2}。$$

如果在式(9)中，令 $\eta=\frac{a+b}{2}$，可得到对应式(9)的修正公式，有如下推论:

推论 2 设 $f(x)\in C^4[a,b]$，则数值求积公式

$$I(f)\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)]+\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

具有 5 次代数精度.

根据梯形修正公式余项“中间点”的渐近性，可对梯形修正公式进一步校正，使其代数精度得到更好的改善。

参 考 文 献

1 赵庆华. 数值积分校正公式. 数学的实践与认识，2007;37（9）:207—208

2 肖泽昌，杜跃鹏. 带端点 3 阶导数的 *Simpson* 修正公式. 吉首大学学报，2008;29(4):20—23

3 李庆扬. 数值分析. 北京:清华大学出版社，1998

4 刘长安，靖稳峰. 一类仅带端点导数的复合求积公式. 西安工业学院学报，2006;20（2）:159—165

5 关 治，陆金甫. 数值分析基础. 北京:高等教育出版社，1998

6 刘彬清. 关于一些数值求积公式的渐近性. 应用数学与计算数学学报，2000;14（2）:83—87

7 邱淑芳，王泽文. 数值积分公式中间点的渐近性质及其应用. 数学的实践与认识，2006;36（5）:218—223

Modified Formula for Trapezoid Method and the Asymptotic Property of the“Mid-point”of Its Remainder

HE Jun-hong

(Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721007, P. R. China)

[**Abstract**] A modified formula for trapezoid method and its truncation error are presented. The convergence order of its compound formula is analyzed. There are 2 more ranks of the convergence order in this modified formula. The asymptotic property of the “mid-point” of the remainder of modified formula for trapezoid method is discussed by studying the remainder formula. The algebraic accuracy of the integration formula is more improved.

[**Key words**] modified formula for trapezoid method truncation error convergence order asymptotic property