第10卷 第8期 2010年3月
1671-1815(2010)08-1940-04
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 8 Mar. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

物理学

圆平面镜自再现模函数的探讨

叶永卫[1,2] 邵阿红[2]
(山西大学物电学院[1],太原 030000;山西水利职业技术学院[2],运城 044000)

摘 要 从光学的波动理论出发,结合数学物理方法,对高功率激光器中常用的元件-圆平面镜腔的自再现模函数进行了分析和研究,利用分离变量法,导出了圆平面镜腔的自再现模函数,并指出了自再现模函数的特性。

关键词 圆平面镜腔 自再现模 光波场
中图法分类号 O437; **文献标志码** A

平行平面镜腔在激光器发展史上是最早被采用的镜腔,第一台激光器(梅曼做的红宝石激光器)就是用平行平面镜腔做成的。目前,在中等以上功率的固体激光器和气体激光器中,镜腔仍然常常采用平行平面镜腔。平行平面镜腔的主要优点是,光束的方向性好(发散角小),光模的体积较大,比较容易获得单横模振荡等等。

圆平面镜腔(一种平行平面镜腔)在高功率激光器中也有广泛的应用。如图1所示,圆平面镜腔是一种对称的平行平面镜开腔,主要是由两个圆平面镜及腔内的激光激活物质(激活物质对光起放大的作用)组成的。因为激光的输出直接和圆平面镜上的光波场相联系,所以,圆平面镜腔内的光波场有十分重要的意义。两个圆平面镜上面的光波场的形成可以看成是光在两个圆平面镜之间往返传播的结果。两个镜面之间的光波场的相互关系是:一个镜面的光波场是由另一个镜面的光波场引起的,反过来也是一样的。那么,当光在两个圆平面镜之间往返传播(平面镜反射作用)时,经过多次往返后,所生成的光波场都会明显地带有衍射的痕迹。而衍射主要发生在圆平面镜的边缘。因为圆平面镜的边缘附近的光波场衰落得更快,所以光经多次衍射之后,边缘振幅往往很小,具有这种特性的光波场受衍射的影响也就会很小。所以,光在圆平面镜的边缘附近经多次衍射之后,圆平面镜腔内的光波场就会形成一种稳态的光波场。这种稳态光场的分布不再受衍射影响,光波在圆平面镜腔内往返一次后,就能够“再现”光源最初发出的光场的分布形态,即出现了自再现模(场或者横模)。自再现模确实是存在的,因为目前在实验上,人们已经观测到了激光的各种稳定的强度的花样,而且也与理论分析吻合得很好。

图1 圆平面镜腔

自再现模对于一个激活的镜腔是很重要的,因为,只要某个自再现模能满足阈值条件,则该自再现模在镜腔内就可以形成自激振荡的光波场。那么,自再现模的形成过程将会伴随着光的受激放大,这样的结果是,光谱不断地变窄,光在空间的相干性不断地增强,同时,光的强度也在不断地增大,最终,这一过程中所形成高强度的激光束就会从激光器中输出来。所以,研究圆平面镜腔的自再现模也是一类很重要的课题。

2009年12月8日收到
第一作者简介:叶永卫(1977—),男,山西运城人,山西水利职业技术学院助理教师,山西大学物电学院读研究生,研究方向:物理电子工程。

从波动光学的理论出发,结合数学物理方法中常用的分离变量法,对高功率激光器中常用的圆平面镜腔中的自再现模函数进行了分析和研究,从而推导出了圆平面镜腔的自再现模的分布函数,并且,也简单地分析了自再现模分布函数的特点。

1　自再现模的积分方程式

文献[1]中提到的惠更斯-菲涅耳原理,是分析和研究衍射现象的基础理论,也是研究开腔模式的理论基础。惠更斯-菲涅耳原理的数学表达方式是菲涅-基尔霍夫积分式,菲涅-基尔霍夫积分式表明,如果知道了光波场在任意一个曲面上的衍射光的振幅和相位分布,就可以推算出衍射光波在这个光波场分布的空间里其它任何一点的振幅和相位分布。

现在在一个圆平面镜腔中探讨这类问题,假设一个光波场分布在圆平面镜腔中的任意一个 S 曲面上,在光波的源点处,光波场的振幅和相位分布函数为 $m(x',y')$,在光波场分布的另一个点 P 处,光波场的振幅和相位分布函数为 $m(x,y)$。将菲涅-基尔霍夫积分式 $m(x,y) = \frac{ik}{4\pi}\iint_s m(x',y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\theta)ds'$ 应用在开腔的两个圆平面镜上的场,光波场经过多次渡越后,新生的光波场的分布函数与源场的分布函数应满足如下的迭代关系[2]:

$$m_{j+1}(x,y) = \frac{ik}{4\pi}\iint_s m_j(x',y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\theta)ds' = \gamma m_j(x,y)$$

这就说明,在开腔里,当光波场模式能够“自再现”时,光波场的振幅和相位分布函数 $m_{j+1}(x,y)$ 应该能把分布函数 $m_j(x,y)$ 再现出来,而分布函数 $m_{j+1}(x,y)$ 比函数 $m_j(x,y)$ 只不过是多了一个与坐标无关的因子 $\gamma = \frac{ik}{4\pi}$。$\gamma = \frac{ik}{4\pi}$ 表示振幅衰减和相位移动。如果用式 $v(x,y) = \gamma\iint_s K(x,y,x',y')v(x',y)ds'$ 表示开腔中不再受衍射影响的稳态光场的分布函数,则任何一个分布函数 $v(x,y)$ 就描述开腔中的自再现模,$v(x,y)$ 为复函数。

$v(x,y) = \gamma\iint_s K(x,y,x',y')v(x',y)ds'$ 称为自再现模的积分方程式,式中,$K(x,y,x',y) = \frac{ik}{4\pi}\frac{e^{-ik\rho(x,y,x',y')}}{\rho(x,y,x',y')}(1+\cos\theta)$,为自再现模的积分方程式的核,$\rho$ 与 θ 是场点与源点的坐标函数。

2　圆平面镜的自再现模函数

在圆平面镜腔的自再现模积分方程式中的 $v(x,y)$ 为复函数,它的模 $|v(x,y)|$ 表示开腔中圆平面镜上光波场的振幅分布,它的幅角表示开腔中圆平面镜上光波场的相位分布。如果考虑到光波的波长 λ,圆平面镜的线度 R,以及圆平面镜腔的腔长 L 之间的相互数量级关系的情况下,将圆平面镜腔的自再现模积分方程式的核 $K(x,y,x',y)$ 展开,这也就是说将 $\rho(x,y,x',y)$ 展开,并且舍弃无关紧要的高阶小量,从而就能够将自再现模积分方程式进一步简化。因为圆平面镜腔的腔长 L 是远大于其反射镜(圆平面镜)的线度 R(圆平面镜的半径)的,即 $L \gg R$,那么,在自再现模积分方程式中,会有

$$(1+\cos\theta)\frac{}{\rho} \approx \frac{2}{L}。$$

应用这个结论,则会得到圆平面镜腔中的自再现模积分方程式的核简化式,如下

$$K(x,y,x',y) = \frac{i}{L}\frac{e^{-ik\rho(x,y,x',y')}}{\lambda}。$$

将自再现模积分方程式的核简化之后,在直角坐标系中研究圆平面镜腔的自再现模,自再现模的分布就会如图 2 所示的那样。在图 2 中,(x,y) 为所研究的光波场的源点,(x',y') 为所研究的光波场点,两点距离为 ρ,L 为圆平面镜腔的腔长。由圆平面镜腔的几何结构,结合菲涅 – 基尔霍夫积分式,就可以写出自再现模的积分方程式的具体形式[2]。

在图 2 建立直角坐标系,那么,在图 2 中,光波场的源点 (x,y) 和光波场点 (x',y') 之间的距离 ρ 应该满足

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + L^2}。$$

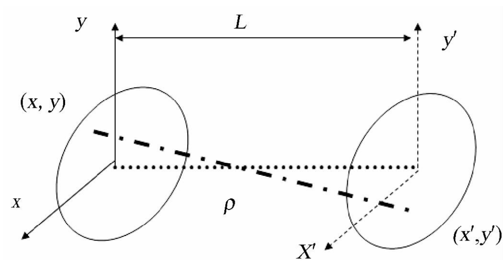

图 2 圆平面镜腔的自在现模分布

将 $\rho = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+L^2}$ 按 $\frac{(x-x')}{L}$ 和 $\frac{(y-y')}{L}$ 的幂级数展开之后，会有

$$\rho(x,x',y,y') = L\sqrt{\left[1+\left(\frac{x-x'}{L}\right)^2+\left(\frac{y-y'}{L}\right)^2\right]} \approx L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{L}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y'}{L}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{x-x'}{L}\right)^4-\frac{1}{8}\left(\frac{y-y'}{L}\right)^4-\frac{1}{4}\left(\frac{x-x'}{L}\right)^2\left(\frac{y-y'}{L}\right)^2+\cdots\right]$$

当一个圆平面镜腔满足条件 $\frac{R^2}{L\lambda} \ll \left(\frac{L}{R}\right)^2$ 时，近似地应该有

$$e^{-ik\rho} = \exp -ik\left[L+\frac{1}{2}\frac{(x-x)^2}{L}+\frac{1}{2}\frac{(y-y')^2}{L}\right] = \exp -ikL\exp -ik\left[\frac{(x-x')^2}{2L}+\frac{(y-y')^2}{2L}\right]。$$

这样，就可以得出自再现模的积分方程式 $v(x,y) = \gamma\iint_s K(x,y,x',y')v(x',y)\,ds'$ 的具体形式，它应该为如下式

$$v(x,y) = \gamma\left(\frac{i}{\lambda L}\right)e^{-ikL}\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R}v(x',y')e^{ik\left[\frac{(x-x')2}{2L}+\frac{(y-y')2}{2L}\right]}dx'dy'$$

上面得出的自再现模积分方程是一个可以分离变量的方程[3]，如果令

$$v(x,y) = v(x)v(y)。$$

并且将它代入上面提到的自再现模的积分方程式中，就可以得出以下的结果

$$v(x) = \gamma_x\int_{-R}^{R}K_x(x,x')v(x,x')\,dx';$$

$$v(y) = \gamma_y\int_{-R}^{R}K_y(y,y')v(y,y')\,dy';$$

$$K_x(x,x') = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}e^{-ikL}e^{-ik\frac{(x-x')2}{2L}}};$$

$$K_y(y,y') = \sqrt{\frac{i}{\lambda L}e^{-ikL}e^{-ik\frac{(y-y')2}{2L}}};$$

$$\gamma = \gamma_x\gamma_y。$$

这样，就做到把一个二元函数 $v(x,y)$ 的积分方程分离成为分别用一元函数 $v(x)$ 和 $v(y)$ 表示的两个积分方程。而且，这两个积分方程的积分形式其实是完全一样的，因此，只须求解其中一个就足够了。

因为二元函数 $v(x,y)$ 分离成的两个积分方程的形式完全一样，所以，上式的第一个积分方程表示的是一个在 x 方向的宽度为 $2R$，在 y 方向的宽度为无限延伸的条状腔的自再现模；第二个积分方程表示的是一个在 y 方向的宽度为 $2R$，在 x 方向的宽度为无限延伸的条状腔的自再现模。即圆平面镜腔的自再现模函数是一个二维腔本征模。

满足的自再现模函数 $v(x)$ 和 $v(y)$ 可能是不止一个，用 $v_m(x)$ 和 $v_n(y)$ 分别表示圆平面镜腔的自再现本征模函数，则有

$$v_m(x) = \gamma_m\int_{-R}^{R}K_x(x,x')v_m(x')\,dx';$$

$$v_n(y) = \gamma_n\int_{-R}^{R}K_y(y,y')v_m(y')\,dy'。$$

整个圆平面镜面上的自再现模分布函数为：

$$v_{m,n}(x,y) = v_m(x)v_n(y)。$$

相应的复常数为

$$\gamma_{m,n} = \gamma_m\gamma_n。$$

只有当上面的复常数 γ_m 和 γ_n 为一系列的不连续的特定值时，镜腔的自再现本征模 $v_m(x) = \gamma_m\int_{-R}^{R}K_x(x,x')v_m(x')\,dx'$ 和 $v_n(y) = \gamma_n\int_{-R}^{R}K_y(y,y')v_m(y')\,dy'$ 才能成立的，γ_m 和 γ_n 称为方程的本征值。对于每一个特定的 γ_m 和 γ_n，能使上式成立的模分布函数 $v_m(x)$ 和 $v_n(y)$ 称为与 γ_m 和 γ_n 相对应的本征函数。这些本征值和本征函数将决定圆平面镜腔自再现模的全部特征光波场的分布（比如说振幅分布和相位分布）及传输特性（比如说自再现模的衰减，相移，谐振频率等）[2]。

圆平面镜腔中的自再现模所表示的光波场还

具备有以下的特征:在镜面的中心处振幅最大,从圆平面镜中心处到圆平面镜边缘振幅逐渐降落,光波场在整个镜面上的分布具有偶对称性,即通常讲的 TEM_{00} 模或者基模。严格地说,TEM_{00} 模不仅不是均匀平面波,而且也不再是平面波了[2]。

对圆平面镜腔自再现模积分方程的精确求解是比较困难的,这是因为,自再现模的分布函数是一系列满足迭代关系的方程组,所以一般要用迭代法来求解,即必须要用迭代公式 $u_{j+1} = \iint_s K u_j \mathrm{d}s'$ 直接进行数值上的计算[2],该式中的 K 即前文所说的自再现模积分方程式的核 $K(x,y,x',y)$。迭代法精确求解必须借助计算机进行计算,所以,对自再现模积分方程进行精确求解是比较困难的事情。

参 考 文 献

1 姚启均. 光学教程(第二版). 北京:高等教育出版社,1998:174—184

2 周炳琨. 激光原理. 北京:国防工业出版社,2004;91—95

3 郭本宏. 数学物理方法. 山西高校联合出版社,1982; 413—415

Discuss for Self Reappearance Module Function of Circle Plane Mirror Concavity

YE Yong-wei[1,2], SHAO A-hong[2]

(Institute of Physics and Information Technology, Shanxi University[1], Taiyuan 030000, P. R. China;

Shanxi Vocational and Technical College of Water Conservancy[2], Yuncheng 044000, P. R. China)

[**Abstract**] From waveoptical theory, the selfreappearance module function of circle plane mirror concavity by mathermatics way for physics are analyzed and discussed, this concavity has benn used for strong power laser instriment. The selfreappearance module function has been elicitatied by dissociate variable, the characteristic of selfreappearance module function is pointed at last.

[**Key words**] circle plane mirror concavity selfreappearance module lightwave field