第 10 卷　第 8 期　2010 年 3 月
1671-1815(2010)08-1929-05

科　学　技　术　与　工　程
Science Technology and Engineering

Vol. 10　No. 8　Mar. 2010
ⓒ　2010　Sci. Tech. Engng.

研究简报

数　学

一类传染病模型的振幅方程

刘厚业　王玮明*

(温州大学数学与信息科学学院,温州 325035)

摘　要　针对一类传染病模型,通过稳定性分析给出了 Turing 失稳条件,在此基础上,利用多重标度分析建立了模型在 Turing 分支处的振幅方程。这将为研究传染病模型的动力学研究提供参考。

关键词　振幅方程　Turing 分支　传染病模型　多重标度分析

中图法分类号　O175.12;　**文献标志码**　A

1952 年,被后人称为计算机科学之父的英国数学家 A. M. Turing 指出反应扩散系统中稳定均匀态会在某种条件下失稳,并自发产生空间定态斑图[1]。Turing 的创造性研究开辟了一个新的研究领域——斑图动力学。斑图动力学对许多学科的研究内容和研究方法都产生了巨大的影响,如化学、物理学、流行病学、生态学等,并成为自然科学、社会科学及工程技术领域的中心问题之一。其中,斑图形成和选择是研究的热点问题之一。

斑图形成和选择的研究大都建立在弱非线性分析(Weakly Nonlinear Analysis)的基础上[2,3]。在这些研究中,研究者借助振幅方程来探究模型在临界点附近从空间均匀稳定态到不稳定态转变过程中斑图的形成。振幅方程可以描述出斑图形成的普遍性态,它通过一对在空间和时间上变化较慢的共轭振幅来描述反应扩散系统中各个变量的变化情况;它可以刻画模型在临界点失稳引起的时空对称性的破缺,和对称性破缺所规定的新的时空结构的自组织形成,即斑图的形成。

从反应扩散系统中导出其对应的振幅方程是研究斑图形成至关重要的一步。求解振幅方程的系数需要大量的符号处理和繁杂的计算,对于大多数反应扩散系统振幅方程仍然无法求解出来。目前为止,振幅方程系数的计算可以通过多种方法来实现,最常用的有规范形(Normal Form)方法和多重标度分析法(Multiple Scale Analysis)等[4,5]。

现将基于多重标度分析方法推导一类空间传染病模型的振幅方程。

1　模型

借助数学模型分析和预测传染病的传播和发展,进而预防和控制传染病的蔓延,已经得到了许多有用的结果[6,7]。现考虑如下的比率依赖型传染病模型[6]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = rS\left(1 - \dfrac{S}{K}\right) - \beta\dfrac{SI}{S+I}, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta\dfrac{SI}{S+I} - cI \end{cases} \qquad (1)$$

式(1)中,$S(t)$、$I(t)$ 分别表示 t 时刻易感种群的个

2009 年 12 月 1 日收到　浙江省自然科学基金(Y7080041)资助

第一作者简介:刘厚业(1983—),陕西榆林人,硕士研究生,研究方向:微分方程。

* 通信作者简介:王玮明(1968—),甘肃陇东人,教授,博士,研究方向:微分方程。

体总数和患病种群的个体总数。r 表示固有的出生率,β 表示传播率,K 表示承载能力,c 表示患病种群的死亡率。为了减少参数,作变换 $S=Ks, I=Ki$,为了简便,仍将 i,s 记为 I,S,模型式(1)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=rS(1-S)-\beta\dfrac{SI}{S+I}\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta\dfrac{SI}{S+I}-cI\end{cases}\tag{2}$$

作时间尺度变换 $t=(S+I)t$[8],代入模型式(2),可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=rS(1-S)(S+I)-\beta IS\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta IS-cI(S+I)\end{cases}.\tag{3}$$

模型式(3)所对应的反应扩散系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=rS(1-S)(S+I)-\beta IS+\nabla^2 S=f(S,I)+\nabla^2 S\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta IS-cI(S+I)+d\nabla^2 I=g(S,I)+d\nabla^2 I\end{cases}\tag{4}$$

其中 $d=\dfrac{d_I}{d_S}>0$ 是两种群扩散系数的比率。

2 Turing 分支

Turing 分支可以反映模型的局部动力学性态,特别是给出 Turing 失稳进而形成 Turing 斑图的区域。

考虑模型式(4)的反应项,即模型式(3),当 $r-\beta+c>0,\beta>c$ 时,模型式(3)在 R_+^2 存在唯一的平衡点 $E(S^*,I^*)$,其中

$$S^*=\frac{r-\beta+c}{r},\quad I^*=\frac{(r-\beta+c)(\beta-c)}{rc}。$$

在平衡点 E,将模型各变量在傅里叶空间展开

$$S(\vec{r},t)\sim S_0\mathrm{e}^{\lambda t+i\vec{k}\vec{r}},\qquad I(\vec{r},t)\sim I_0\mathrm{e}^{\lambda t+i\vec{k}\vec{r}},$$

可得特征方程为

$$|J-k^2D-\lambda E|=0,\tag{5}$$

其中,$k^2=\vec{k}\cdot\vec{k}$,$D=\mathrm{diag}(1,d)$,J 为 Jacabian 矩阵:

$$J=\begin{bmatrix}f_S & f_I\\ g_S & g_I\end{bmatrix}_E=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

在这里,

$$a_{11}=\frac{(r-\beta+c)(\beta^2-c^2-r\beta)}{rc},a_{12}=\frac{(\beta-r-c)c}{r},$$

$$a_{21}=\frac{(r-\beta+c)(c-\beta)^2}{rc},\ a_{22}=\frac{(r-\beta+c)(c-\beta)}{r}。$$

求解特征方程(5),可得如下色散关系

$$\lambda^2-tr_k\lambda+\Delta_k=0\tag{6}$$

其中

$$tr_k=a_{11}+a_{22}-k^2(1+d)\tag{7}$$

$$\Delta_k=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}-k^2(a_{11}d+a_{22})+k^4d\tag{8}$$

Turing 分支对应的非平衡相变,是模型从均匀定态到非均匀周期振荡态的转变。相变后形成的斑图成为 Turing 斑图。从式(7)和式(8)可以得出产生 Turing 分支的必要条件:

$$tr_0=a_{11}+a_{22}<0\tag{9-1}$$

$$\Delta_0=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0\tag{9-2}$$

$$da_{11}+a_{22}>0\tag{9-3}$$

$$\Delta_k=\Delta_0-\frac{(a_{11}d+a_{22})^2}{4d}<0\tag{9-4}$$

条件式(9-4)说明模型对于某些模数的微扰是不稳定的,即在临界点是有 $\Delta_k=0$。也就是,Turing 失稳要求色散关系式(6)的解 λ 满足如下的条件:

$$\mathrm{Re}(\lambda)=0,\quad \mathrm{lm}(\lambda)=0。$$

选取 r 作为分支参数,可得 Turing 分支条件为

$$r_T=\frac{(2c\sqrt{d}-dc-c-d\beta)(c-\beta)}{\beta d}.\tag{10}$$

当系统发生 Turing 失稳后,Turing 斑图开始出现,斑图的临界波数由式(8)确定:

$$k_T^2=\frac{a_{11}d+a_{22}}{2d}=$$

$$\frac{c(\sqrt{d}-1)(dc-\beta+c+2\beta\sqrt{d}-2c\sqrt{d}-d\beta)}{d(2c\sqrt{d}-dc-c-d\beta)}\tag{11}$$

Turing 失稳是 Turing 斑图形成的必要条件,但它不能具体的描述斑图形成和变化。而振幅方程是一种被人们广泛认可的分析斑图形成的有效工具,下面将利用多重标度分析法建立模型式(4)的振幅方程。

3　振幅方程推导

根据对称性原理[2—5],二维反应扩散系统在 Turing 分支处的振幅方程具有如下形式

$$\begin{cases}\tau\dfrac{\partial A_1}{\partial t}=\mu A_1+\gamma\overline{A_2A_3}-(g_1|A_1|^2+g_2(|A_2|^2+|A_3|^2))A_1,\tau\dfrac{\partial A_2}{\partial t}=\mu A_2+\gamma\overline{A_1A_3}-\\(g_1|A_2|^2+g_2(|A_1|^2+|A_3|^2))A_2\\\tau\dfrac{\partial A_3}{\partial t}=\mu A_3+\gamma\overline{A_1A_2}-(g_1|A_3|^2+g_2(|A_1|^2+|A_2|^2))A_3。\end{cases}\quad(12)$$

式(12)中,$\mu=(r-r_T)/r_T$,A_j、$\overline{A_j}$是一对共轭的振幅,分别对应于模$\overrightarrow{k_j}$ 和 $-\overrightarrow{k_j}(j=1,2,3)$,$\overrightarrow{k_1}$,$\overrightarrow{k_2}$,$\overrightarrow{k_3}$ 之间夹角为 120°.

在 Turing 分支临界点附近,模型式(4)的解在傅里叶空间具有如下形式。

$$U=\begin{pmatrix}S\\I\end{pmatrix}=U_0\sum_{j=1}^{3}[A_j\exp(\overrightarrow{i\,k_j\,r})+\overline{A_j}\exp(-\overrightarrow{i\,k_j\,r})]\quad(13)$$

式(13)中,$|\overrightarrow{k_j}|=\overrightarrow{k_c}$。围绕平衡点 E 做微扰:$S=S^*+s$,$I=I^*+i$,微扰后仍以 S,I 分别表示 s,i,则模型式(4)可以改写为:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=LU+N\quad(14)$$

式(14)中 L 为线性算符,N 为模型的非线性项,

$$L=\begin{pmatrix}L_{11}+\nabla^2 & L_{12}\\L_{21} & L_{22}+d\nabla^2\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}N_1\\N_2\end{pmatrix}。$$

其中,

$$L_{11}=\frac{(\beta-r-c)(c^2+r\beta-\beta^2)}{rc},\ L_{12}=\frac{(\beta-r-c)c}{r},$$

$$L_{21}=\frac{(\beta-c)(rc-r\beta+\beta^2-2c\beta+c^2)}{rc},$$

$$L_{22}=\frac{rc-r\beta+\beta^2-2c\beta+c^2}{r},$$

$$N_1=\frac{S(\beta^2S-2c^2S-2c^2I-rcS^2-r\beta S-rcSI)}{c}-\frac{S(rcS+rcI-\beta cS-\beta cI)}{c},$$

$$N_2=I(\beta S-cS-cI)。$$

为研究模型式(4)在 Turing 分支临界点附近的局部动力学行为,模型在 r_T 临界点微扰展开有

$$r_T-r=\varepsilon r_1+\varepsilon^2r_2+\varepsilon^3r_3+o(\varepsilon^4)\quad(15)$$

同样有,

$$U=\varepsilon U_1+\varepsilon^2U_2+\varepsilon^3U_3+o(\varepsilon^4)\quad(16-1)$$

$$N=\varepsilon^2h_2+\varepsilon^3h_3+o(\varepsilon^4)\quad(16-2)$$

$$L=L_T+(r_T-r)L_1+(r_T-r)^2L_2+o((r_T-r)^3)=L_T+(r_T-r)M\quad(17)$$

式(17)中,$L_i=\dfrac{1}{i!}\dfrac{\partial^iL}{\partial r^i}$,$L_T=L_{(r=r_T)}$。

多重标度分析的核心是将模型的动力学行为按不同的时间尺度展开。将模型式(4)按照不同的时间尺度 $T_1=\varepsilon t$,　$T_2=\varepsilon^2t$ 展开,则有

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+o(\varepsilon^3)\quad(18)$$

利用式(15)—式(18),可以将模型式(14)(即模型式(4))按照 ε 的不同阶展开,对于 ε 的一阶有

$$L_TU_1=0\quad(19)$$

求解线性方程式(19)可得

$$U_1=V_0(\sum_{j=1}^{3}W_i\exp(\overrightarrow{i\,k_j\,r})+c.c.)\quad(20)$$

$c.c.$ 表示其共轭项,$V_0=\left(1,\dfrac{\beta-c}{c\ \ /d}\right)$。对于展开式中 ε 的二阶项,代入 U_1 有:

$$L_TU_2=\frac{\partial}{\partial T_1}U_1-r_1MU_1-h_2\quad(21)$$

h_2 是模型式(14)非线性项 N 展开式中 ε 的二阶无穷小项。方程(21)有解的必要条件是方程满足弗来德霍姆(Fredholm)可解条件[5],即方程(21)右边的向量必须与 L_T 的伴随矩阵 L_T^+ 的零特征向量线性相关。由弗来德霍姆可解条件可以求解得到$\dfrac{\partial}{\partial T_1}W_j$,$(j=1,2,3)$的值。代入 U_1,求解线性方程(21)可得:

$$U_2(\overrightarrow{r},t)=V_0+(\sum_{j=1}^{3}V_j\exp(\overrightarrow{j\,k_j\,r})+\sum_{j=1}^{3}V_{jj}\exp(2\overrightarrow{j\,k_j\,r})+\sum_{j,k=1}^{3}V_{jk}\exp(j(\overrightarrow{k_j}-\overrightarrow{k_k})r)+c.c.)\quad(22)$$

其中,向量 V_0、V_j、V_{jj}、V_{jk} 分别按照 e^0,$e^{\overrightarrow{ik_jr}}$,$e^{\overrightarrow{2ik_jr}}$,

$e^{i(\vec{k}_j-\vec{k}_k)r}$收集线性方程(21)右边项,然后分别求解得出。

$$L_T U_3 = \frac{\partial}{\partial T_1}U_1 + \frac{\partial}{\partial T_2}U_2 - r_1 M U_2 - r_2 M U_1 - h_3 \quad (23)$$

h_2 是模型式(14)非线性项 N 展开式中 ε 的三阶无穷小项。再次利用弗来德霍姆可解条件,由方程(23)可以得到$\frac{\partial}{\partial T_1}V_j + \frac{\partial}{\partial T_2}W_j$ 的值($j=1,2,3$)。

A_1 可在微扰下按无穷小量 ε 展成如下形式

$$A_1 = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 V_1 + o(\varepsilon^3),$$

则振幅 A_1 随时间 t 变化的微分方程可写为

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial W_1}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial V_1}{\partial t} + o(\varepsilon^3) \quad (24)$$

代入$\frac{\partial}{\partial T_1}W_1$、$\frac{\partial}{\partial T_1}V_1 + \frac{\partial}{\partial T_2}W_1$ 的值,利用式(18)按照 ε 的不同阶整理合并,即可得到关于 A_1 的振幅方程为:

$$\tau\frac{\partial A_1}{\partial t} = \mu A_1 + \gamma\overline{A_2 A_3} - (g_1|A_1|^2 + g_2(|A_2|^2 + |A_3|^2))A_1, \quad (25)$$

式(25)中,

$$\mu = (r_T - r)/r_T, \tau = \frac{1-d}{2\sqrt{d}(c-\beta) - dc - c + d\beta + \beta};$$

$$\gamma = \frac{2c^2(3\sqrt{d} - 1 - 3d + d^{3/2})}{\beta(2\sqrt{d}(c-\beta) - dc - c + d\beta + \beta)};$$

$$g_1 = \frac{cP_1}{9P_2 R}; g_2 = \frac{cQ_1}{Q_2 R}。$$

其中,R,P_1,P_2,T,Q_1,Q_2 如下。

$R = \beta^2(d^{3/2} + 3\sqrt{d} - 3d - 1)(\sqrt{d} - 1)(2\sqrt{d} - d - 1)$。

$P_1 = 8c^2 d^{13/2}(c+\beta) + cd^6(3\beta^2 - 81c^2 - 62c\beta) + d^{11/2}\times(348c^3 - 27\beta^3 + 222c^2\beta - 9\beta^2 c) + d^5(216\beta^3 - 770c^3 - 615c^2\beta - 27\beta^2 c) + d^{9/2}(153\beta^2 c + 660c^3 + 1\,860c^2\beta - 756\beta^3) + d^4(1\,089c^3 - 5\,301c^2\beta - 162\beta^2 c + 1\,512\beta^3) + d^{7/2}(11\,364c^2\beta - 378\beta^2 c - 1\,890\beta^3 - 4\,488c^3) + d^3\times(1\,386\beta^2 c + 7\,524c^3 - 17\,214c^2\beta + 1\,512\beta^3) + d^{5/2}\times(18\,360c^2\beta - 1\,998\beta^2 c - 7\,920c^3 - 756\beta^3) + d^2(5\,665c^3 + 1\,647\beta^2 c + 216\beta^3 - 13\,760c^2\beta) + d^{3/2}(7118c^2\beta - 2\,772c^3 - 27\beta^3 - 813\beta^2 c) + d(225\beta^2 c - 2\,427c^2\beta + 894c^3) + d^{1/2}\times(492c^2\beta - 172c^3 - 27\beta^2 c) + 15c^3 - 45c^2\beta$。

$P_2 = (4d^{/2} + 4d^{3/2} - 6d - 1 - d^2)(\beta^2 - 2c\beta + c^2)$。

$Q_1 = 3c^2 d^{13/2}(c+\beta) - cd^6(35c^2 + 4\beta^2 + 3c\beta) + d^{11/2}\times(186c^3 + 33\beta^2 c - 6\beta^3 + 172c^2\beta) + d^5(48\beta^3 - 594c^3 - 111\beta^2 c - 568c^2\beta) + d^{9/2}(1\,335c^2\beta - 168\beta^3 + 1\,265c^3 + 174\beta^2 c) + d^4(336\beta^3 - 36\beta^2 c - 1\,881c^3 - 2\,361c^2\beta) + d^{7/2}(3\,216c^2\beta + 1\,980c^3 - 378\beta^2 c - 420\beta^3) + d^3(336\beta^3 - 3\,384c^2\beta - 1\,452c^3 + 798\beta^2 c) + d^{5/2}(2\,721c^2\beta - 864\beta^2 c - 168\beta^3 + 693c^3) + d^2(48\beta^3 - 165c^3 + 576\beta^2 c - 1\,635c^2\beta) + d^{3/2}(708c^2\beta - 6\beta^3 - 239\beta^2 c - 22c^3) + d(57\beta^2 c - 208c^2\beta + 30c^3) + d^{1/2}\times(37c^2\beta - 9c^3 - 6\beta^2 c) + c^3 - 3c^2\beta$。

$Q_2 = d^2(2\beta c - c^2 - \beta^2) + 4d^{3/2}(\beta^2 + c^2 - 2\beta c) + 6d\times(2\beta c - c^2 - \beta^2) + 4d^{1/2}(\beta^2 + c^2 - 2\beta c) - c^2 + 2\beta c - \beta^2$。

关于 A_2、A_3 的振幅方程可以通过对 A_1 的方程(25)变换下标得到。

4 讨论

本文利用多重标度分析方法建立了一类传染病反应扩散系统的振幅方程,并给出了振幅方程系数的求解算法。从计算过程中可以看出,振幅方程的建立涉及到大量复杂的符号计算,因此,需要借助一些数学软件,比如 Maple,Matlab。符号计算是通过 Maple 实现的。

给出的方法只适用计算 Turing 分支临近处的振幅方程。对于其它分支处的振幅有不同的计算方法,比如 Hopf 分支处的振幅方程,一般采用规范形的算法。

参 考 文 献

1 Turing A M. The chemical basis of morphogenesis. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1952; 237(641): 37—72

2 Dufiet V, Boissonade J. Dynamics of Turing pattern monolayers close to onset. Physical Review E, 1996; 53(5): 4883—4892

3 Pena B, Perez-Garca C. Stability of Turing patterns in the Brusselator model. Physical Review E, 2001; 64(5): 5621—5623

4 Ipsen M, Kramer L, Sorensen P G. Amplitude equations for description of chemical reaction-diffusion systems. Physics Reports, 2000; 337: 193—235

5 欧阳颀. 反应扩散系统中的斑图动力学. 上海: 上海科技教育出

版社, 2000

6 Haque M, Venturino E. An ecoepidemiological model with disease in predator: the ratio-dependent case. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2007;30(14):1791—1810

7 Haque M, Zhen J, Venturino E. An ecoepidemio-logical predator-prey model with standard disease incidence, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008;32(7):875—898

8 Li B, Kuang Y. Heteroclinic Bifurcation in the michaelis-menten-type ratio-dependent predator-prey system. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2007;67(5):1453—1464

The Amplitude Equations of an Epidemic Model

LIU Hou-ye, WANG Wei-ming *

(College of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou 325035, P. R. China)

[**Abstract**] Turing bifurcation of an epidemic model from the spatial domain is derived. Further, the amplitude equation of the model for the excited modes in the Turing bifurcation is estallished. This will be useful for the study on the dynamics of epidemic model.

[**Key words**] amplitude equation Turing bifurcation epidemic model multiple scale analysis

(上接第 1928 页)

Comparison of Monte Carlo Simulation and Quasi-Monte Carlo Simulation in Option Pricing

MU Kuang-ning

(Antai college of Economics & Management Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

[**Abstract**] In options trading, the most critical problem is the determination of option prices. Monte Carlo simulation, an effective method for option pricing, had rapid development in recent years. However, Monte Carlo method generated pseudo-random numbers, which shows slow convergence rate, large amount of calculation. Quasi-Monte Carlo simulation is proposed to replace the quasi-random numbers sequences of pseudo-random number sequences of Monte Carlo simulation. This method for the improvement of estimated effect depends on the random sequences' distribution homogeneity in sample space. A linear congruence generator is studied; Halton sequences, Sobol' sequences, and the characteristics of such random number sequences. European-style call option as an example to study the effectiveness of the proposed Monte Carlo method, pseudo-random sequence and random sequence carried out Monte Carlo simulation in financial calculations, as the contrastive experiment shows the Quasi-Monte Carlo simulation has high precision, speed and so on.

[**Key words**] Monte Carlo simulation Quasi-Monte Carlo simulation random sequences option pricing