第10卷 第5期 2010年2月
1671－1815(2010)5-1202-03

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 5 Feb. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

随机环境中非齐次马氏链的强极限定理

许 华 王明刚

（南京师范大学泰州学院数学系，泰州 225300）

摘 要 通过随机环境中马氏链的一般构造性定义，利用鞅差序列级数收敛定理，得到了随机环境中马氏链的一类强极限定理。

关键词 马氏链 随机环境 鞅 强极限定理

中图法分类号 O211.62； **文献标志码** A

关于齐次马氏链与非齐次马氏链的极限定理已有相当多的研究，但这些研究均是对确定的马氏链而言的，随机环境中的马氏链是近年来兴起的新课题。Nawrotzki 最早研究了随机环境中马氏链的一般理论[1]，Cogburn 研究了随机环境中马氏链的遍历理论及中心极限定理[2]。近年来，毕秋香等人对随机环境中马氏链泛函极限定理进行了进一步的研究[3]。本文通过随机环境中马氏链的一般构造性定义，利用鞅方法，将文献[4]中一类随机变量的强极限定理推广到了随机环境中，得到了随机环境中马氏链的一类强极限定理。

1 随机环境中马氏链的构造性定义

设 E 是有限集或可列集，ε 是 E 的一切子集的全体构成的 σ 代数，Z 及 Z^+ 分别表示全体整数及全体非负整数集，E^{Z^+}，ε^{Z^+} 分别表示轨道空间及相应的由柱集产生的乘积 σ 代数。

以 M 记 E 上全体转移概率矩阵，即 $M = \{m(x,y),x,y \in E\}$，$m(x,y)$ 为转移矩阵，在 M 上赋弱拓扑定义一最小 σ 代数 M，使对任意的 $x,y \in E$，$m(x,y)$ 为 M 可测的；M^Z，M^Z 分别表示乘积空间和相应的乘积 σ 代数。

定义1 设 Q 为 (M^Z,M^Z) 上的概率分布，$m \in (m_k,k \in Z) \in M^Z$，$(M^Z,M^Z,Q)$ 空间上的典型过程 $\eta_n(m) = m_n, n \in Z$ 称为环境过程，称可测空间 (M^Z,M^Z,Q) 为环境空间。

对 $x = (x_k,k \in Z^+) \in E^{Z^+}$ 及任意 E 上固定的概率测度 μ，当 $0 < l < \infty$，令

$$m(x_0,x_1,\cdots,x_l) = \mu(x_0)m_0(x_0,x_1)m_1(x_1,x_2)\cdots m_{l-1}(x_{l-1},x_l) \quad (1)$$

式(1)确定了 ε_0^l 上的分布。由于 l 是任意的，因此也确定了 ε^{Z^+} 上的一切有限维分布，全体这样的分布记为 m_μ，称 m_μ 是有初始分布 μ，取值于 E 的非齐次马氏链。

设初始分布 μ 固定，对任意 $\Gamma \in M^Z, A \in \varepsilon^{Z^+}$，令

$$\Omega \in M^Z \times E^{Z^+}, F \in M^Z \times \varepsilon^{Z^+}, P(\Gamma A) = \int_\Gamma m_\mu(A)Q\,\mathrm{d}m \quad (2)$$

可以证明，固定 $A \in \varepsilon^{Z^+}$，$m_\mu(A)$ 看成 m 的函数是 M^Z 可测的。故上述定义有意义，由测度论扩张定理，P 可扩张成 F 上的一个概率测度，仍记为 P。

定义2 对任意的 $m \in M^Z$，$x \in E^{Z^+}$，$\omega = (m,x)$，x 在时间 n 的坐标记为 x_n，令 $X_n(\omega) = x_n$，$\{X_n(\omega), n \geqslant 0\}$ 为 (Ω,F,P) 上的随机过程，这个过程称为有初始分布 μ，取值于 E 上随机环境中的马氏链。

2009年11月17日收到

第一作者简介：许 华（1981—），女，江苏姜堰人，讲师，研究方向：概率极限的理论研究。

设 E, E_Q, E_{m_μ} 分别表示概率空间 (Ω, F, P), (M^Z, M^Z, Q), $(E^{Z^+}, \varepsilon^{Z^+}, m_\mu)$ 上的数学期望,于是有 $E(\cdot) = E_Q(E_{m_\mu}(\cdot))$。

2 主要结果及证明

定理 设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是 (Ω, F, P) 上的随机环境中马氏链,环境空间为 (M^Z, M^Z, Q), α 为 M^Z 的子 σ - 代数, $\{a_n, n \geqslant 1\}$ 是非零随机序列,且 a_n 是 $\alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})$ 可测的。设 $\{\phi_n(\cdot), n \geqslant 0\}$ 是一列可测函数, $\phi_n: R \to R_+$ 是一列 Borel 可测的非负偶函数列。若对某个 $r \geqslant t (1 \leqslant t \leqslant 2)$,并存在常数 $K_n > 0$,满足

$$0 < t_1 < t_2 \Rightarrow \frac{\phi_n(t_1)}{t_1^r} \leqslant K_n \frac{\phi_n(t_2)}{t_2^r} \tag{3}$$

令

$$A_1 = \left\{\omega: \frac{\sum_{n=1}^{\infty} K_n E[\phi_n(|X_n|) \mid \alpha\, \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})]}{d_n^{t/2} \phi_n(\sqrt{a_n})} < \infty\right\} \tag{4}$$

$$A_2 = \left\{\omega: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n^{t/2}} < \infty\right\} \tag{5}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}(X_n - E[X_n \mid \alpha\, \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})])$ 在 $A_1 \cap A_2$ 上 a. e. 收敛　　(6)

设 $B = \{\omega: \lim_{n\to\infty} a_n = \infty\} \cap A_1 \cap A_2$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \{X_k - E[X_k \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{k-1})]\} = 0, \text{a. e.}, \omega \in B$　　(7)

证明 对 $n \geqslant 1$,令 $Y_n = \frac{1}{a_n}(X_n - E[X_n \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})$,易证 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 是关于 $M^Z \times \varepsilon^{Z^+}$ 的 σ 代数流 $\{\alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1}), n \geqslant 1\}$ 的鞅差序列。

由于 $1 \leqslant t \leqslant 2$,据 C_r 不等式及 Jensen 不等式有:

$$E[|Y_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] \leqslant \frac{2^{t-1}}{d_n} E[\{|X_n|^t + E[|X_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})]\} \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] = \frac{2^t}{a_n^t} E[|X_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] \leqslant \frac{C}{a_n^t} E[|X_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})]$$

(C 为正常数),又由于 $r \geqslant t$ 及式(3),则有

$$E[|X_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] = E[|X_n|^t I(|X_n| \leqslant \sqrt{a_n}) \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] + E[|X_n|^t I(|X_n| > \sqrt{a_n}) \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] \leqslant (\sqrt{a_n})^t + (\sqrt{a_n})^t E\left[\frac{|X_n|^t}{(\sqrt{a_n})^t} I(|X_n| > \sqrt{a_n}) \mid X_0, \cdots, X_{n-1})\right] \leqslant (\sqrt{a_n})^t + (\sqrt{a_n})^t K_n E\left[\frac{\phi_n(|X_n|)}{\phi_n(\sqrt{a_n})} I(|X_n| > (\sqrt{a_n}) \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})\right] \leqslant (\sqrt{a_n})^t + (\sqrt{a_n})^t K_n E\left[\frac{\phi_n(|X_n|)}{\phi_n(\sqrt{a_n})} \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})\right] \text{a. e.}$$

从而由式(4),式(5),则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|Y_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{a_n^t} E[|X_n|^t \mid \alpha\sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})] \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n^{t/2}} + C\sum_{n=1}^{\infty} K_n \times \frac{E[\phi_n(|X_n|) \mid \alpha \times \sigma(X_0, \cdots, X_{n-1})]}{d_n^{t/2} \phi_n(\sqrt{a_n})} < \infty$$

a. e. $\omega \in A_1 \cap A_2$ (C 为正常数)。

故 $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ 在 $\omega \in A_1 \cap A_2$ 中 a. e. 收敛,即(6)式成立。再由 Kronecker 引理有(7)式成立。证毕。

参 考 文 献

1 Nawrotzki K. Finite Markov chains in stationary random environments. Ann Probab, 1982;10:1041—1046

2 Cogburn R. On the central theorems for Markov chains in random environments. Ann Probab, 1991;19(2):587—604

3 毕秋香,李炜. 随机环境中马氏链的泛函极限定理. 中山大学学报,2000;39(6):153—156

4 闫广州,张丽娜. 任意随机变量序列的一个强极限定理. 山西大学学报(自然科学版),2008;31(3):323—325

(下转第 1210 页)

Cavitation and Its Application on Sterilization

FENG Zhong-ying

(Department of Science, Taiyuan Institute of Technology, Taiyuan 030008, P. R. China)

[**Abstract**] The cavitation is one kind of extremely complex phenomenon, the cavitation can cause the extremely high instantaneous intensity of pressure and the temperature, thus can bring the multitudinous applications, but sterilizating by ultrasonic cavitation has just only been done in the laboratory. The sterilizing capacity of ultrasound is very limited. The mechanism of the sterilization has been studied, Cavitation sterilizing experiments have been done. The result indicates that, the ultrasonic cavitation and the hydrodynamic cavitation all have the very good sterilization effect, the hydrodynamic cavitation can process more than the ultrasonic cavitation.

[**Key words**] ultrasonic cavitation hydrodynamic cavitation sterilization

(上接第 1201 页)

3 Wu X Q, Lu J A. Suppression and generation of chaos for a three-dimensional autonomous system using paramet-ric perturbations. Chaos, Solitons and Fractals, 2007; 31(4): 811—819

4 Liu C X, Liu L. A new butterfly-shaped attractor Lorenz-like system, Chaos, Solitons and Fractals, 2006; 28(5): 1196—1203

5 Kuznestov Y A. Elements of applied bifurcation Yheory. New York: Spring; 1998

6 Xue Y. Quantitative study of general motion stability and example on power system stability. Nanjing: Jiangsu Sc-ience and Technology Press, 1999

Hopf Bifurcation Analysis of a 3D Chaotic System

LI Fu-qin, TU Jin-zhong[1]

(Institue of Science and Technology of Three Gorge University, Yichang 443002, P. R. China;

Xiaoxita Senior Middle School of Yichang City[1], Yichang 443002, P. R. China)

[**Abstract**] A 3D chaotic system is analyzed dynamical behaviors *via* the complementary-cluster energy-barrier criterion (CCEBC). Moreover the Hopf bifurcation of this system is also investigated by using of the first Lyapunov coefficient. Finally, the system presents a Hopf bifurcation which is subcritical or supercritical in different intervals.

[**Key words**] Hopf bifurcation the chaotic system the first Lyapunov coefficient

(上接第 1203 页)

Class of Strong Limit Theorems of Non-homogeneous Markov Chains in Random Environments

XU Hua, WANG Ming-gang

(Mathematics Department of Taizhou College, Nanjing Normal University, Taizhou 225300, P. R. China)

[**Abstract**] The constructive definition of Markov chains in random environments is given. A class of strong limit theorems of Markov chains in random environments by martingale theorem is proved.

[**Key words**] Markov Chains random environment martingale strong limit theorems