第10卷 第5期 2010年2月
1671－1815(2010)5-1319-05
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 5 Feb. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

基于CIR利率模型下的期权定价

沈惟维 潘文亮

(暨南大学经济学院,广州 510632)

摘 要 讨论了利率演化服从CIR模型时,以零息债券作为计价单位,利用远期测度的方法给出欧氏看涨期权的定价公式,并给出其一般性的证明。

关键词 CIR利率模型 风险中性定价公式 欧氏看涨期权 远期测度

中图法分类号 F830.9; **文献标志码** A

经典的Black-Scholes期权定价公式中假定利率是常数,而现实市场中利率往往是随机的,利率变动的影响是很重要的。关于利率模型常见的有Vasicek模型[1] Cox, Ingersoll and Ross模型(CIR模型)[2]。Vasicek模型有闭形式的解,利率有均值回复的性质,但总有正概率使得利率取负值,这是不合理的。CIR模型也有均值回复的性质,利率不会取负值,虽然没有闭形式的解,但我们可由Monte Carlo模拟逼近,这不在本文讨论范围之内。

假设市场模型无套利且是完全的。我们用$R(t)$表示短期利率。(Ω,F,P)是概率空间,$W(t)$,$0 \leqslant t \leqslant T$是其上的一维标准布朗运动。域流$F(t)$,$0 \leqslant t \leqslant T$是由该布朗运动生成。定义贴现过程:

$$D(t) = \exp\{-\int_0^t R(s)\mathrm{d}s\} \tag{1}$$

1 风险中性定价公式

关于风险中性定价公式可参考文献[3],那里有较详细的论述。我们先不加证明的给出Girsanov定理,关于其证明可参考文献[3]。在文献[4]中给出了此定理的更

一般情形下的证明。

定理1.1 (Girsanov定理) 设$H(t)$,$0 \leqslant t \leqslant T$是一个适应过程。

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t H(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)\mathrm{d}s\right\} \tag{2}$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t H(s)\mathrm{d}s \tag{3}$$

并且假设:

$$E\int_0^T H^2(s)Z^2(s)\mathrm{d}s < \infty \tag{4}$$

令$Z = Z(T)$,则$EZ = 1$ 。定义测度$\tilde{P}$:

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega)\mathrm{d}P(\omega), \forall A \in F \tag{5}$$

则在此测度下,过程$\tilde{W}(t)$,$0 \leqslant t \leqslant T$是一个布朗运动。

定义1.2 Girsanov定理中的测度称为风险中性测度。(它是一个概率测度,等价于原测度P 。)

定理1.3 (风险中性定价公式) 对于衍生证券在时刻t的价格$V(t)$,我们有风险中性定价公式:

$$V(t) = \frac{1}{D(t)}\tilde{E}[D(T)V(T) \mid F(t)], 0 \leqslant t \leqslant T \tag{6}$$

2009年11月13日收到

第一作者简介:沈惟维(1984—),男,汉族,安徽无为县人,暨南大学经济学院统计学系研究生,研究方向:数理金融与精算学。E-mail: wwshen1984@163.com。

式(6)中 $V(T)$ 是 $F(T)$- 可测随机变量,它表示在时刻 T 衍生证券的支付。

证明见参考文献[3]。

2 CIR 利率模型下的零息债券定价

在风险中性测度下,考虑 CIR 利率模型,利率的演化过程由下面的随机微分方程给出:

$$dR(t) = (a - bR(t))dt + \sigma_1\sqrt{R(t)}\,d\tilde{W}(t) \qquad (7)$$

式(7)中 a , b , σ_1 为正的常数。

定义 2.1 (零息债券)许诺在确定的到期日 T 支付一定数量"面值"(通常取为 1)的一份协议。其价格记为 $B(t,T)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 。根据风险中性定价公式, $B(t,T)$ 应该满足:

$$B(t,T) = \frac{1}{D(t)}\tilde{E}[D(T) \mid F(t)] \qquad (8)$$

定理 2.2 在 CIR 利率模型下,零息债券有如下定价公式:

$$B(t,T) = \exp\{-R(t)C(t,T) - A(t,T)\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (9)$$

式(9)中

$$C(t,T) = \frac{\sinh(\gamma(T-t))}{\gamma\cosh(\gamma(T-t)) + \frac{1}{2}b\sinh(\gamma(T-t))} \qquad (10)$$

$$A(t,T) = -\frac{2a}{\sigma_1^2}\lg\left[\frac{\gamma\exp\left\{\frac{1}{2}b(T-t)\right\}}{\gamma\cosh(\gamma(T-t)) + \frac{1}{2}b\sinh(\gamma(T-t))}\right] \qquad (11)$$

$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2\sigma_1^2}$, $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$。

证明 由于 R 是由随机微分方程(7)给出,故为马尔可夫过程,从而必有哑变量 t 和 r 的某个函数 $f(t,r)$,使得:

$$B(t,T) = f(t,R(t)) \qquad (12)$$

再根据式(6),债券的贴现价格 $D(t)B(t,T)$ 在风险中性测度下是鞅。即

$$\begin{aligned} d(D(t)B(t,T)) &= d(D(t)f(t,R(t))) = \\ & f(t,R(t))dD(t) + D(t)df(t,R(t)) = D(t)(-Rfdt + f_t dt + \\ & f_r dR + \frac{1}{2}f_{rr}dRdR) = D(t)[-Rf + f_t + (a-br)f_r + \frac{1}{2}\sigma_1^2 r f_{rr}]dt \\ & + D(t)\sigma_1\sqrt{R(t)}f_r d\tilde{W}(t)\ 。 \end{aligned} \qquad (13)$$

令 dt 项等于 0,有

$$f_t(t,r) + (a-br)f_r(t,r) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 r f_{rr}(t,r) = rf(t,r) \qquad (14)$$

因为在到期日 T 债券的价值等于其面值 1,所以还有终值条件:

$$f(T,r) = B(T,T) = 1, \forall r \qquad (15)$$

我们猜测式(14)的解具有如下形式:

$$f(t,r) = \exp\{-rC(t,T) - A(t,T)\} \qquad (16)$$

则

$$[(-C'(t,T) + bC(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 C^2(t,T) - 1)r - A'(t,T) - aC(t,T)]f(t,r) = 0 \qquad (17)$$

由于上式对所有 r 成立,故等式中 r 前面的因子必为 0 且另一项也为 0,从而得到自变量为 t 的两个常微分方程:

$$C'(t,T) = bC(t,T) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 C^2(t,T) - 1 \qquad (18)$$

$$A'(t,T) = -aC(t,T) \qquad (19)$$

这两个方程还满足终值条件:

$$C(T,T) = A(T,T) = 0 \qquad (20)$$

这是因为 $f(T,r) = \exp\{-rC(T,T) - A(T,T)\} = 1$ 对所有 r 都成立,故必有式(20)成立。下面只需解这两个常微分方程即可得出式(10),式(11),这里略去。可参见文献[3],那里有较详细的证明。证毕。

3 以零息债券作为计价单位的远期测度下的资产定价公式

考虑某种资产(股票),其以货币计量的价格为 $S(t)$,在 $\tilde{P}$ 下满足:

$$dS(t) = R(t)S(t)dt + \sigma_2 S(t)d\tilde{W}_t \quad (21)$$

式(20)中 σ_2 是常数。在时刻 T 交割一份该资产用以换取 K 的远期合约在时刻 T 的支付为 $S(T)-K$ 。根据风险中性定价公式,该合约在较早时刻 t 的价值为:

$$V(t) = \frac{1}{D(t)}\tilde{E}[D(T)(S(T)-K) \mid F(t)] \quad (22)$$

由于 $D(t)S(t)$ 在 $\tilde{P}$ 下是鞅以及式(8),我们有

$$V(t) = S(t) - \frac{K}{D(t)}\tilde{E}[D(T) \mid F(t)] = S(t) - KB(t,T) \quad (23)$$

定义 3.1　使得式(23)中在时刻 t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 的远期合约价格为 0 的 K 的值称为 T – 远期价格。记为: $For_s(t,T)$ 。即 $For_s(t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)}$ 。

定义 3.2　设 T 是固定到期日,定义 T – 远期测度:

$$\tilde{P}^T(A) = \frac{1}{B(0,T)}\int_A D(T)d\tilde{P},\ \forall A \in F \quad (24)$$

在 $\tilde{P}^T$ 下,任何随机变量 X 的期望值为:

$$\tilde{E}^T(X) = \frac{1}{B(0,T)}\tilde{E}[XD(T)] = \tilde{E}(XZ) \quad (25)$$

这里我们令 $Z = \frac{D(T)}{B(0,T)}$ 。再令 $Z(t) = \frac{D(t)B(t,T)}{B(0,T)}$,由于 $B(T,T)=1$,则 $Z = Z(t)$,且 $\frac{D(t)B(t,T)}{B(0,T)} = \tilde{E}[\frac{D(T)B(T,T)}{B(0,T)} \mid F(t)],0 \leqslant t \leqslant T \quad (26)$

我们也有 $Z(t) = \tilde{E}(Z \mid F(t)),0 \leqslant t \leqslant T$ 。

引理 3.3　给定 $0 \leqslant t \leqslant T$, Y 是 $F(t)$ – 可测,则 $\tilde{E}^T(Y) = \tilde{E}(YZ(t))$ 。

证明

$$\tilde{E}^T(Y) = \tilde{E}(YZ) = \tilde{E}[\tilde{E}(YZ \mid F(t))] = \tilde{E}[Y\tilde{E}(Z \mid F(t))] = \tilde{E}(YZ(t))。$$

引理 3.4　给定 $0 \leqslant t \leqslant T$, $V(T)$ 是 $F(T)$- 可测,则

$$\tilde{E}^T[V(T) \mid F(t)] = \frac{1}{Z(t)}\tilde{E}[V(T)Z(T) \mid F(t)] \quad (27)$$

证明　由于 $\frac{1}{Z(t)}\tilde{E}[V(T)Z(T) \mid F(t)]$ 为 $F(t)$- 可测,我们只需验证:

$\int_A \frac{1}{Z(t)}\tilde{E}[V(T)Z(T) \mid F(t)]d\tilde{P}^T = \int_A V(T)d\tilde{P}^T, \forall A \in F(t)$ 即可。

由于

$$\tilde{E}^T[I_A \frac{1}{Z(t)}\tilde{E}[V(T)Z(T) \mid F(t)]] = \tilde{E}[I_A\tilde{E}[V(T)Z(T)] \mid F(t)] = \tilde{E}[\tilde{E}[I_A V(T)Z(T) \mid F(t)]] = \tilde{E}[I_A V(T)Z(T)] = \tilde{E}[I_A V(T)Z(T)] = \tilde{E}^T[I_A V(T)] = \int_A V(T)d\tilde{P}^T$$

。证毕。

由引理 3.4 和式(6),我们有

$$\tilde{E}^T[V(T) \mid F(t)] = \frac{1}{D(t)B(t,T)}\tilde{E}[V(T) \times D(T) \mid F(t)] = \frac{1}{B(t,T)}V(t) \quad (28)$$

即　$V(t) = B(t,T)\tilde{E}^T[V(T) \mid F(t)] \quad (29)$

我们称式(29)为 T- 远期测度下的资产定价公式。

4 CIR 利率模型下的期权定价

对于原生资产 $S(t)$,远期价格 $For_s(t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)}$ 的波动率只与 $S(t)$ 有关,并且在远期测度

下的远期价格是鞅[3]，$\tilde{W}^T(t)$ 是远期测度下的用于推导资产价格的布朗运动，因此我们有 $dFor_s(t,T)=\sigma_2 For_s(t,T)d\tilde{W}^T(t)$，$\sigma_2$ 是常数。

定理4.1 设 $S(t)$ 是以货币计量的资产价格，假定其满足 $dFor_s(t,T)=\sigma_2 For_s(t,T)d\tilde{W}^T(t)$，$\sigma_2$ 是常数。则该资产的到期日为 T、敲定价格为 K 的欧氏看涨期权在时刻 $t\in[0,T]$ 的价值为：

$$V(t)=S(t)N(d_+(t))-KB(t,T)N(d_-(t)) \tag{30}$$

式(30)中 $d_\pm(t)$ 是由式(31)给出的适应过程：

$$d_\pm(t)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{T-t}}\left[\lg\frac{For_s(t,T)}{K}\pm\frac{1}{2}\sigma_2^2(T-t)\right] \tag{31}$$

$$N(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z \tag{32}$$

$B(t,T)$ 满足式(9)。

证明 文献[3]给出了在 $t=0$ 时的证明，这里我们运用独立性引理给出一般的 t 的证明。由 $For_s(t,T)=\dfrac{S(t)}{B(t,T)}$ 知 $For_s(0,T)=\dfrac{S(0)}{B(0,T)}$，于是 $\mathrm{d}For_s(t,T)=\sigma_2 For_s(t,T)\mathrm{d}\tilde{W}^T(t)$ 的解为：

$$For_s(t,T)=\frac{S(0)}{B(0,T)}\exp\left\{\sigma_2\tilde{W}^T(t)-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t\right\}。$$

所以

$$\begin{aligned}For_s(T,T)&=\frac{S(0)}{B(0,T)}\exp\left\{\sigma_2\tilde{W}^T(T)-\frac{1}{2}\sigma_2^2 T\right\}=\\&\frac{S(0)}{B(0,T)}\exp\left\{\sigma_2(\tilde{W}^T(T)-\tilde{W}^T(t))-\frac{1}{2}\sigma_2^2(T-t)+\sigma_2\tilde{W}^T(t)-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t\right\}=\\&For_s(t,T)\exp\left\{\sigma_2(\tilde{W}^T(T)-\tilde{W}^T(t))-\frac{1}{2}\sigma_2^2(T-t)\right\}。\end{aligned}$$

再由式(29)以及注意到 $For_s(T,T)=S(T)$ 知：

$$\begin{aligned}V(t)&=B(t,T)\tilde{E}^T[(S(T)-K)^+|F(t)]=\\&B(t,T)\tilde{E}^T\left[(For_s(t,T)\exp\left\{\sigma_2(\tilde{W}^T(T)-\tilde{W}^T(t))-\frac{1}{2}\sigma_2^2(T-t)\right\}-K)^+|F(t)\right]=\\&B(t,T)\tilde{E}^T\left[(For_s(t,T)\exp\left\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\right\}-K)^+|F(t)\right]。\end{aligned}$$

其中：$Y=-\dfrac{\tilde{W}^T(T)-\tilde{W}^T(t)}{\sqrt{T-t}}$，$\tau=T-t$。

令 $g(t,x)=\tilde{E}^T[(x\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\}-K)^+]$。

我们看到 $For_s(t,T)$ 是 $F(t)$－可测，$\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\}$ 独立与 $F(t)$，由独立性引理可知存在函数 $g(t,x)$ 使得

$$g(t,For_s(t,T))=\tilde{E}^T[(For_s(t,T)\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\}-K)^+|F(t)]。$$

而

$$g(t,x)=\tilde{E}^T[(x\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\}-K)^+]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\}-K)^+e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y$$

由于 $(x\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\}-K)^+$ 取正值当且仅当 $y<\dfrac{1}{\sigma_2\sqrt{\tau}}[\log\dfrac{x}{K}-\dfrac{1}{2}\sigma_2^2\tau]=d_-(t)$，故

$$\begin{aligned}g(t,x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(t)}\left(x\exp\left\{-\sigma_2\sqrt{\tau}y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\right\}-K\right)e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(t)}x\exp\left\{-\frac{1}{2}y^2-\sigma_2\sqrt{\tau}y-\frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\right\}\mathrm{d}y-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(t)}Ke^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y=\\&\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(t)}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y+\sigma_2\sqrt{\tau})^2\right\}\mathrm{d}y-KN(d_-(t))=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-(t)+\sigma_2\sqrt{\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}z^2\right\}\mathrm{d}y-KN(d_-(t))=xN(d_+(t))-KN(d_-(t))。\end{aligned}$$

其中：$d_+(t)=d_-(t)+\sigma_2\sqrt{\tau}$。

所以

$$g(t,For_s(t,T)) = \tilde{E}^T[(For_s(t,T)\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y - \frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\} - K)^+ | F(t)] = For_s(t,T)N(d_+(t)) - KN(d_-(t))。$$

于是

$$V(t) = B(t,T)\ \tilde{E}^T[(For_s(t,T)\exp\{-\sigma_2\sqrt{\tau}Y - \frac{1}{2}\sigma_2^2\tau\} - K)^+ | F(t)] = B(t,T)For_s(t,T)N(d_+(t)) - KB(t,T)N(d_-(t)) = S(t)N(d_+(t)) - KB(t,T)N(d_-(t))。$$

定理证毕。

5 小结

本文是基于文献[3],主要目的是给出定理 4.1 在一般的 t 的证明,文献[3]只给出 $t = 0$ 时的证明。文献[3]说只需修改 $t=0$ 时的证明就可以得出一般的证明,我们认为这样不易做到,需要另辟蹊径。我们的证明中用到了独立性引理。实际上,定理 4.1 是个一般情况下的定理,它不依赖于利率所服从的模型,本文为了容易说明,选择了 CIR 利率模型。另外,本文所给出的证明方法具有一般性,是处理条件期望的一种有效方法。定理 4.1 必须在原生资产 T-远期价格具有常数波动率的假设下才适用,此时欧氏看涨期权才有较为简单的定价公式。

参 考 文 献

1 Vasicek O. Anequilibrium characterization of the term structre, J Fin Econ,1977;5: 177—188

2 Cox J C, Ingersoll J E, Ross S. A theory of the term structure of interest rates, Econometrica,1985;53;373—384

3 Shreve S E. Stochastic calculus for finance II. 北京:世界图书出版公司,2007

4 金治明. 随机分析基础及其应用. 北京:国防工业出版社,2003

Pricing European Options Based on CIR Interest Rates Model

SHEN Wei-wei, PAN Wen-liang

(Statistics ofJinan University,Guangzhou 510632,P. R. China)

[**Abstract**] The pricing of European options is discussed when the evolution of interest rate under CIR model. Through zero-coupon bonds as numeraire and by the use of the forward measure, The European call options pricing formula and its general proof are got.

[**Key words**] CIR interest rates model risk-neutral pricing formula european call options forward measure

(上接第 1318 页)

Building and Application of the Financial Risk Warning System Based on Possibility-Satisfiability (P-S) Method

CHEN Jing-yu, WANG Yi-jie

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200052, P. R. China)

[**Abstract**] Early warning systems for company helped detect financial risk and prevent financial crises. This paper establishes a new Early Warning System (EWS) especial for Chinese private enterprise for predicting financial risk based on P-S method and Factor Analysis. It conducts empirical researches with the data of 14 companies and shows effective and good warning capability.

[**Key words**] financial risk early warning P-S method factor Analysis