

地球科学

# 黏弹性流体饱和孔隙介质动力反 应分析的显式有限元法

田迎春 章梓茂<sup>1</sup> 赵成刚<sup>1</sup> 马坚伟 杨慧珠

(清华大学航天航空学院地震波勘探开发研究所, 北京 100086; 北京交通大学土建学院<sup>1</sup>, 北京 100044)

**摘 要** 黏弹性流体饱和多孔介质模型比单相介质或者弹性饱和孔隙介质更接近实际的土层介质,应用该模型研究土层介质的动力响应更为合理。用数值方法研究了半空间黏弹性流体饱和孔隙介质的动力时域响应。根据 Biot 黏弹性流体饱和两相多孔介质波动方程,采用解耦技术,建立了以固相位移和流相位移为未知量的黏弹性流体饱和孔隙介质动力分析的一种显式有限元法。该方法克服了隐式方法需要求解联立方程组的缺点,具有节省计算机内存空间和计算时间的优点。与解析解比较表明,该算法具有较高的计算精度;最后以一维黏弹性流体饱和孔隙介质为例,分析了黏性系数对动力响应的影响。

**关键词** 黏弹性流体饱和孔隙介质 显式有限元法 动力响应

**中图分类号** P315.01; **文献标志码** A

大量的工程实践和实验表明:岩土工程的研究对象(岩体、土体)都具有显著的流变效应<sup>[1]</sup>,变形不仅仅取决于最终的应力状态,而且与应力变化的历史和时间有关,其应力-应变关系呈现显著的流变状态。此外,实际地层一般不是单一的固体或液体,而是由多孔固体骨架和孔隙流体组成的双相介质;因此,黏弹性流体饱和多孔介质模型比单相固体、流体介质或者弹性饱和孔隙介质(Biot 介质<sup>[2]</sup>)更接近实际的土层介质,采用该模型研究土层介质的动力响应更为合理,更具有实际意义。将地层视为黏弹性流体饱和孔隙介质,并假定固相骨架具有 Kelvin 黏弹性固体特征,求解动力响应。

由于波动方程是固相与流相耦合的二阶偏微分方程组,它很复杂,只有在极少数特定边界条件下才能求得解析解。绝大多数饱和多孔介质波动问题都是采用数值方法求解,特别是采用有限元法<sup>[3]</sup>。目前用于求解饱和多孔介质波动问题的有限元方法多

为隐式法<sup>[4]</sup>。然而,用隐式法解时域问题时,在每个计算时间步长中都要求求解联立线性方程组,当问题复杂或自由度很多时,其计算工作量将很大,这极大地限制了它的应用和发展。为克服上述缺点,本文在赵成刚等<sup>[5,6]</sup>提出的求解 Biot 饱和多孔介质波动方程的显式有限元解法的基础上,推导了求解黏弹性流体饱和孔隙介质动力问题的显式有限元格式。该方法采用了解耦技术,只求单刚而不组成总刚矩阵,不求解联立方程组,因而具有节省内存空间和提高计算速度等优点。该方法与局部透射人工边界相结合<sup>[7]</sup>,就可以分析黏弹性饱和多孔介质的波动问题。算例分析表明,其结果与精确解符合得很好,该方法具有很好的计算精度。

## 1 波动方程

根据 Biot 所采用的表示方法,假设骨架为线性 Kelvin 材料,则双相介质的基本方程如下。  
固相应力-应变关系。

$$\sigma_{ij} = \lambda \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) e \delta_{ij} + 2\mu \left( 1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) e_{ij} +$$

2009年11月9日收到 国家重点基础研究发展计划(973)(2007CB209505)和国家自然科学基金(40674061,40704019,10572072)资助  
第一作者简介:田迎春(1978—),女,河北保定人,博士,研究方向:复杂孔隙介质的波场模拟和数值反演。

$$\frac{Q}{R}(Qe + R\varepsilon) \quad (1a)$$

$$\text{流相应力-应变关系} \quad \sigma_f = Qe + R\varepsilon \quad (1b)$$

$$\text{固相运动方程: } \sigma_{ij,i}^s = \rho_{11}\ddot{U}_i + \rho_{12}\ddot{W}_i + b(\dot{U} - \dot{W}) \quad (1c)$$

$$\text{流相运动方程: } \sigma_{f,i} = \rho_{12}\ddot{U}_i + \rho_{22}\ddot{W}_i - b(\dot{U} - \dot{W}) \quad (1d)$$

由上述方程可导出黏弹性流体饱和孔隙介质的  $U$ - $W$  型运动方程:

$$\mu\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 U + \nabla \left[ ((\lambda + \mu) \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{Q^2}{R})e + Q\varepsilon \right] = \rho_{11}\ddot{U} + \rho_{12}\ddot{W} + b(\dot{U} - \dot{W})$$

$\nabla(Qe + R\varepsilon) = \rho_{12}\ddot{U} + \rho_{22}\ddot{W} - b(\dot{U} - \dot{W})$  (2)  
式(2)中,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{12}$  和  $\rho_{22}$  为动力质量系数, 且满足  $\rho_{11} = (1 - n)\rho_s + \rho_a$ ,  $\rho_{22} = n\rho_f + \rho_a$ ,  $\rho_{12} = -\rho_a$ ;  $U$  和  $W$  分别为固体骨架和孔隙流体的位移向量;  $e$  和  $\varepsilon$  分别为固体骨架和孔隙流体的体积应变,  $e = \text{div } U$ ,  $\varepsilon = \text{div } W$ ;  $\rho_s$  和  $\rho_f$  分别为固体骨架和孔隙流体的质量密度;  $\rho_a$  为描述流固两相耦合的附加质量密度;  $b$  为与渗流有关的系数,  $b = \eta_f n^2 / k$  ( $\eta_f$  为流体的绝对黏度,  $n$  为孔隙率,  $k$  为渗透系数); 系数  $\lambda, \mu, Q, R$  为黏弹性流体饱和孔隙介质的弹性系数,  $\eta$  是固相的黏性系数, 上标“.”表示对时间  $t$  求导。

## 2 显式有限元方程的建立

### 2.1 考虑二维情况, 用矩阵形式表示波动方程

定义如下矩阵:

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, U = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix}, W = \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

把式(3)代入波动方程式(2)中, 得到用矩阵形式表达的黏弹性流体饱和多孔介质波动方程为

$$L^T D_1 L U + L^T D'_1 L \dot{U} + L^T D_2 L W = \rho_{11}\ddot{U} + \rho_{12}\ddot{W} + b(\dot{U} - \dot{W}) L^T D_2 L U + L^T D_3 L W =$$

$$\rho_{12}\ddot{U} + \rho_{22}\ddot{W} - b(\dot{U} - \dot{W}) \quad (4)$$

其中,

$$D_1 = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + Q^2/R & \lambda + Q^2/R & 0 \\ \lambda + Q^2/R & \lambda + 2\mu + Q^2/R & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} Q & Q & 0 \\ Q & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D'_1 = \eta \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

### 2.2 网格划分及有限元离散

将平面内边界为  $\Gamma$  的区域  $\Omega$  剖分成  $m$  个线性四边形单元, 共有  $k$  个节点。每个单元  $\alpha$  的区域记为  $\Omega^e$ , 满足  $\Omega = \sum_e \Omega^e$ , 单元边界记为  $\Gamma^e$ 。在局部坐标下单元的形函数记为:  $N = [N_1, N_2, N_3, N_4]$ , 其中,  $N_i = N_i(\xi, \eta)I$ ,  $\xi, \eta \in [-1, 1]$  为局部坐标的两个坐标轴,  $I$  为二阶单位阵,  $i = 1, 2, 3, 4$ 。

根据 Zienkiewicz<sup>[8]</sup> 直接写出式(4)的 Galerkin 弱式

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} N^T \rho_{11} \ddot{U}_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega^e} N^T \rho_{12} \ddot{W}_e dx dy + \\ & \sum_e \int_{\Omega^e} B^T D'_1 B \dot{U}_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega^e} N^T b N (\dot{U}_e - \dot{W}_e) dx dy + \\ & \sum_e \int_{\Omega^e} B^T D_1 B W_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega^e} B^T D_2 B W_e dx dy = \\ & \sum_e \oint_{\Gamma^e} N^T f_{U_e} d\Gamma \sum_e \int_{\Omega^e} N^T \rho_{12} \ddot{U}_e dx dy + \\ & \sum_e \int_{\Omega^e} N^T \rho_{22} \ddot{W}_e dx dy + \sum_e \int_{\Omega^e} B^T D_2 B U_e dx dy - \\ & \sum_e \int_{\Omega^e} N^T b N (\dot{U}_e - \dot{W}_e) dx dy + \sum_e \int_{\Omega^e} B^T D_3 B W_e dx dy = \\ & \sum_e \oint_{\Gamma^e} N^T \int_{\Gamma^e} d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)中,  $B = LN$ ;  $U_e$  和  $W_e$  分别为单元  $e$  的节点固相和流相位移;  $f_{U_e}$  和  $f_{W_e}$  分别为作用在单元  $e$  的节点固相和流相外力。

### 2.3 离散方程及其解耦技术

在有限元中某一节点的物理量可以用周围邻近节点的物理量表示,即只有相邻节点对该节点有贡献。考虑已剖分完毕的某一系统中的任一节点,令其为节点 1,图 1 给出了节点 1 和与它直接相邻的节点所构成的局部节点系,该节点系包含 9 个节点,节点编号用下标表示。这表明所考虑的系统中的任一节点都可令其为节点 1,其相邻节点都可按图 1 表示。通过整体坐标与局部坐标的坐标转化公式,可以得到式(5)中关于节点 1 的离散方程:

$$\begin{aligned} & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{Uj}^L \ddot{U}_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{UWj}^L \ddot{W}_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L (\dot{U}_j^L - \\ & \dot{W}_j^L) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L U_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWj}^L W_j^L + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L W_j^L = \sum_{L=1}^4 f_{U1}^L \sum_{j=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{Uj}^L \ddot{U}_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{Wj}^L \ddot{W}_j^L - \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L (\dot{U}_j^L - \dot{W}_j^L) + \\ & \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L U_j^L + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{WWij}^L W_j^L = \\ & \sum_{L=1}^4 f_{W1}^L \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)中,上标“ $L$ ”代表节点 1 周围的单元;下标“ $j$ ”代表同一单元的 4 个节点;各参数意义如下。

$$M_{\gamma ij}^L = \iint_{\Omega^L} \rho_{\gamma} [N_i] [N_j] dx dy =$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_{\gamma} [N_i] [N_j] |J|^L d\xi d\eta。$$

$$K_{kij}^L = \iint_{\Omega^L} [B_i]^T [D_k] [B_j] dx dy =$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D_k] [B_j] |J|^L d\xi d\eta。$$

$$K_{Uij}^L = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D_1] [B_j] |J|^L d\xi d\eta。$$

$$C_{ij}^L = \iint_{\Omega^L} b [N_i] [N_j] dx dy =$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 b [N_i] [N_j] |J|^L d\xi d\eta。$$

$$f_{U1}^L = \int_{-r^L} [N_1] \left\{ \begin{matrix} \tilde{T}_x \\ \tilde{T}_y \end{matrix} \right\} d\Gamma; f_{W1}^L = \int_{-r^L} [N_1] \left\{ \begin{matrix} np_f \\ np_j \end{matrix} \right\} d\Gamma。$$

式中,  $\rho_{\gamma} = \rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$  对应的  $M_{\gamma} = M_U, M_{UW}, M_W$ ;

$D_k = D_1, D_2, D_3$  对应的  $K_{kij}^L = K_{UUij}^L, K_{UWij}^L, K_{WWij}^L$ ;  $|J|^L$  为  $L$  单元的雅克比矩阵;  $\tilde{T}_x$  和  $\tilde{T}_y$  为  $L$  单元边界固相  $x$  方向和  $y$  方向的分布外力;  $p_i$  为边界孔隙水压力。

式(5)和式(6)是完全等价的,只不过表达形式不同。式(5)是有限元方法建立的整体方程,而式(6)是针对每一节点(即节点 1)建立的局部节点动力方程,其目的是建立类似有限差分的显式有限元方法,从而无需求解整体联立方程组。

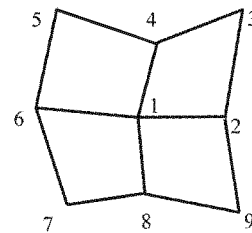


图 1 局部节点系

为满足波动问题数值模拟的计算精度,要求有限元的尺寸同波长相比应足够小,故在每一单元内惯性力的空间变化很小,故假定同一个单元内的惯性力为常量。同理可以假定在同一个单元内的加速度为常量,即等于其节点的加速度:  $\ddot{U}_j^L = \ddot{U}_1, \ddot{W}_j^L =$

$\ddot{W}_1$ ;由此可得到集中质量阵:  $M_{U1} \ddot{U}_1 = \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{Uj}^L \ddot{U}_j^L,$

$M_{W1} \ddot{W}_1 = \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{Wj}^L \ddot{W}_j^L, M_{UW1} \ddot{W}_1 = \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{UWj}^L \ddot{W}_j^L,$

$M_{UW1} \ddot{U}_1 = \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 M_{UWj}^L \ddot{U}_j^L$ ,代入式(6)中,可知对于

有限元网格中的任一节点,式(6)均成立,且式中的未知参量仅与该节点有关,从而实现了方程的解耦。

### 2.4 内部节点动力反应表达式

采用有限元法处理无限域问题时,必须引入人工边界,因此有限元网格中的节点就被分为两类节点,即人工边界节点和内部节点,人工边界节点的运动量表达式可由内部结点的运动量表示。

利用有限元方法建立离散的动力方程后,即可求解动力方程。令内部节点 1 为节点  $i$ ,当时间步数为  $p$  和  $p+1$  时,由式(6)引入集中质量模型假设,写出  $p\Delta t$  和  $(p+1)\Delta t$  时刻的内部节点运动的方程式,两式相加得。

$$\begin{cases}
M_{U_i}(\ddot{U}_i^p + \ddot{U}_i^{p+1}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L((\dot{U}_j^{L,p} + \dot{U}_j^{L,p+1}) - \\
(\dot{W}_j^{L,p} + \dot{W}_j^{L,p+1})) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UUij}^L(U_j^{L,p} + U_j^{L,p+1}) + \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L(W_j^{L,p} + W_j^{L,p+1}) + M_{UW_i}(\ddot{W}_i^p + \ddot{W}_i^{p+1}) + \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L(\dot{U}_j^{L,p} + \dot{U}_j^{L,p+1}) = \sum_{L=1}^4 (f_{U_i}^{L,p} + f_{U_i}^{L,p+1}) \\
M_{UW_i}(\ddot{U}_i^p + \ddot{U}_i^{p+1}) + M_{W_i}(\ddot{W}_i^p + \ddot{W}_i^{p+1}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L \\
(U_j^{L,p} + U_j^{L,p+1}) \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L((\dot{U}_j^{L,p} + \dot{U}_j^{L,p+1}) - \\
(\dot{W}_j^{L,p} + \dot{W}_j^{L,p+1})) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{WWij}^L(W_j^{L,p} + W_j^{L,p+1}) = \\
\sum_{L=1}^4 (f_{W_i}^{L,p} + f_{W_i}^{L,p+1})
\end{cases} \quad (7)$$

采用李小军<sup>[9]</sup>等建立的中心差分法与 Newmark 常值平均加速度方法结合的第一格式,代入方程组(7),可以得到用前一时刻的位移和速度表示的当前时刻位移的显式表达式。

$$\begin{cases}
U_i^{p+1} = U_i^p + \Delta t \dot{U}_i^p - \frac{\Delta t^2}{2} \left( M_{U_i} - \frac{M_{UW_i} M_{UW_i}}{M_{W_i}} \right)^{-1} \\
\left\{ \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UUij}^L U_j^{L,p} + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L W_j^{L,p} + \right. \\
\left( \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L (\dot{U}_j^{L,p} - \dot{W}_j^{L,p}) \left( 1 + \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} \right) \right) + \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L \dot{U}_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L U_j^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} - \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{WWij}^L W_j^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} - \sum_{L=1}^4 f_{U_i}^{L,p} + \sum_{L=1}^4 f_{U_i}^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} \left. \right\} \\
W_i^{p+1} = W_i^p + \Delta t \dot{W}_i^p - \frac{\Delta t^2}{2} \left( M_{W_i} - \frac{M_{UW_i} M_{UW_i}}{M_{U_i}} \right)^{-1} \\
\left\{ \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L U_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UUij}^L U_j^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} + \right. \\
\left( \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L (\dot{U}_j^{L,p} - \dot{W}_j^{L,p}) \left( -1 - \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} \right) \right) - \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L \dot{U}_j^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L W_j^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} + \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{WWij}^L W_j^{L,p} - \sum_{L=1}^4 f_{W_i}^{L,p} + \sum_{L=1}^4 f_{W_i}^{L,p} \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} \left. \right\}
\end{cases} \quad (8)$$

式(8)中,  $\{u_i^q\}$ ,  $\{\dot{u}_i^q\}$ ,  $\{\ddot{u}_i^q\}$  分别为节点  $i$  在  $q$  时刻位移、速度、加速度,其中  $u = U, W$ ;  $q = p-1, p, p+1$ ;  $q$  和  $p$  均表示时间步数。

根据 Newmark 常值平均加速度法,有

$$\frac{\{\ddot{u}_i^{p+1}\} + \{\ddot{u}_i^p\}}{2} = \frac{\{\dot{u}_i^{p+1}\} - \{\dot{u}_i^p\}}{\Delta t} \quad (9a)$$

$$\frac{\{\dot{u}_i^{p+1}\} + \{\dot{u}_i^p\}}{2} = \frac{\{u_i^{p+1}\} - \{u_i^p\}}{\Delta t} \quad (9b)$$

式(9)中符号的意义与(8)中符号的意义相同。把式(9)代入式(7)中,便可以得到用前一时刻的位移、速度和加速度以及当前时刻的位移表示的当前时刻的速度的显式表达式:

$$\begin{cases}
\dot{U}_i^{p+1} = \dot{U}_i^p - \left( M_{U_i} - \frac{M_{UW_i} M_{UW_i}}{M_{W_i}} \right)^{-1} \\
\left\{ \left( \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L (U_j^{L,p+1} - U_j^{L,p} - W_j^{L,p+1} + W_j^{L,p}) \left( 1 + \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} \right) \right) + \right. \\
\frac{\Delta t}{2} \left[ \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UUij}^L (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L \times \right. \\
(W_j^{L,p+1} + W_j^{L,p}) - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} - \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{WWij}^L (W_j^{L,p+1} + W_j^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} - \sum_{L=1}^4 (f_{U_i}^{L,p+1} + f_{U_i}^{L,p}) + \\
\sum_{L=1}^4 (f_{W_i}^{L,p+1} + f_{W_i}^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{W_i}} \left. \right] + \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L (U_j^{L,p+1} - U_j^{L,p}) \left. \right\}, \\
\dot{W}_i^{p+1} = \dot{W}_i^p - \left( M_{W_i} - \frac{M_{UW_i} M_{UW_i}}{M_{U_i}} \right)^{-1} \times \\
\left\{ \left( \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{ij}^L (U_j^{L,p+1} - U_j^{L,p} - W_j^{L,p+1} + W_j^{L,p}) \times \right. \right. \\
\left. \left( -1 - \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} \right) \right) + \frac{\Delta t}{2} \left[ \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L (U_j^{L,p+1} + U_j^{L,p}) + \right. \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{WWij}^L (W_j^{L,p+1} + W_j^{L,p}) - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L (U_j^{L,p+1} + \\
U_j^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} - \sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{UWij}^L (W_j^{L,p+1} + W_j^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} - \\
\sum_{L=1}^4 (f_{W_i}^{L,p+1} + f_{W_i}^{L,p}) + \sum_{L=1}^4 (f_{U_i}^{L,p+1} + f_{U_i}^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} \left. \right] - \\
\sum_{L=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{Uij}^L (U_j^{L,p+1} - U_j^{L,p}) \frac{M_{UW_i}}{M_{U_i}} \left. \right\}
\end{cases} \quad (10)$$

由式(9a)可得用前一时刻的速度和此时刻的速度表示的加速度的显式表达式:

$$\begin{cases}
\ddot{U}_i^{p+1} = -\ddot{U}_i^p + 2(\dot{U}_i^{p+1} - \dot{U}_i^p)/\Delta t \\
\ddot{W}_i^{p+1} = -\ddot{W}_i^p + 2(\dot{W}_i^{p+1} - \dot{W}_i^p)/\Delta t
\end{cases} \quad (11)$$

至此,建立了黏弹性流体饱和孔隙介质波动方

程式(1)的自起步有限元的显式差分格式。由式(8)可以看出,  $U_i^{p+1}$  和  $W_i^{p+1}$  可以用前一步  $p$  的运动量求解;式(10)中的  $\dot{U}_i^{p+1}$  和  $\dot{W}_i^{p+1}$  可以由  $U_i^{p+1}$ 、 $W_i^{p+1}$  以及前一步  $p$  的运动量求解;最后,式(11)中的  $\ddot{U}_i^{p+1}$  和  $\ddot{W}_i^{p+1}$  可以由  $\dot{W}_i^{p+1}$  和  $\dot{U}_i^{p+1}$ , 以及前一步  $p$  的加速度求解。因而,根据式(8)一式(11)就可以利用前一时刻的反应求得此一时刻点的动力反应。

需要说明的是:若令固相的黏性系数  $\eta = 0$ , 则有  $K_{Uij}^L = 0$ , 考虑固体黏性的流体饱和和孔隙介质内部节点的动力反应的显式表达式(8), 式(10)和式(11)可以退化成弹性流体饱和和多孔介质内部节点的动力反应的显式表达式。

### 3 算例分析

#### 3.1 退化为弹性饱和和孔隙介质与解析解的比较

为了验证该方法的准确性和精度,令黏性系数为零,将黏弹性饱和和孔隙介质退化为弹性孔隙饱和和介质,对具有解析解的一维模型进行了计算,并与解析解进行了对比。文献[10]给出半无限大一维弹性流体饱和和孔隙介质动力反应的解析表达式(其中流体饱和和多孔介质满足相容条件)。计算参数为:  $A = 2.378 \times 10^7$  Pa,  $N = 1.250 \times 10^7$  Pa,  $n = 0.333$ ,  $\rho_s = 3101$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_f = 2977$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_j = 3060$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta = 0.0$  Pa·s,  $k/\eta_f = 0.4883 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>/(N·s),  $Q = 1.54 \times 10^5$  Pa,  $R = 1.54 \times 10^5$  Pa, 在介质表面作用三角形的动荷载,假定表面排水不受限制。

分别利用文献[10]给出的解析方法和本文中给出的数值方法,计算了自由表面的固相位移和流相位移。图2给出了用两种方法计算得到的自内部点B的竖向固相位移,图2中以时间变量  $t$  为横坐标,固相位移参量  $u$  为纵坐标。从图中可以看出提出的数值解法与解析解法得到的结果吻合较好符合很好,表明本文方法具有较好的计算精度。

#### 3.2 黏性系数的影响

为了讨论黏性系数  $\eta$  对黏弹性流体饱和和孔隙介质的固相位移和流相位移的影响,用数值方法计算

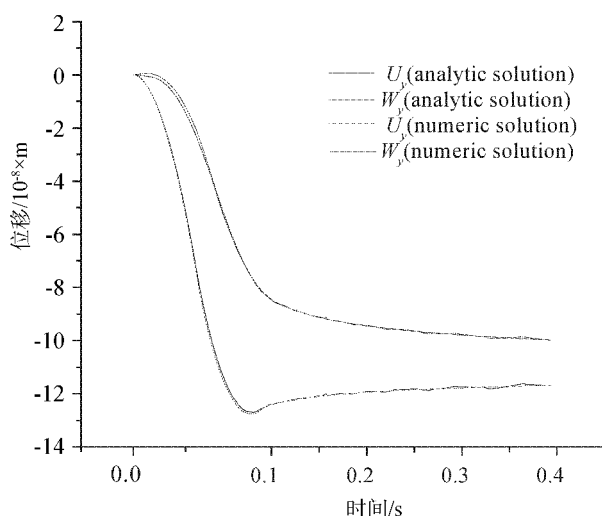


图2 解析方法和本文方法得到的点B的固相位移和流相位移

了  $\eta = 0$  时和  $\eta \neq 0$  (以  $\eta = 0.01$  为例) 时域内深 2 m 处 B 点的竖向固相位移和流相位移,结果如图3所示;从图3可知,黏性系数  $\eta$  对固相位移和流相位移都有一定的影响,且  $\eta \neq 0$  时的固相位移、流相位移较  $\eta = 0$  时的位移小。这是由于固相和流相的相互作用以及固相本身的黏性,随着深度的增加,固相骨架的位移响应逐渐减小,并且与弹性多孔介质比较,由于蠕变效应,黏弹性多孔介质的固相位移大于相应的弹性多孔介质的固相位移,这与杨晓等<sup>[10]</sup>给出的结论一致。

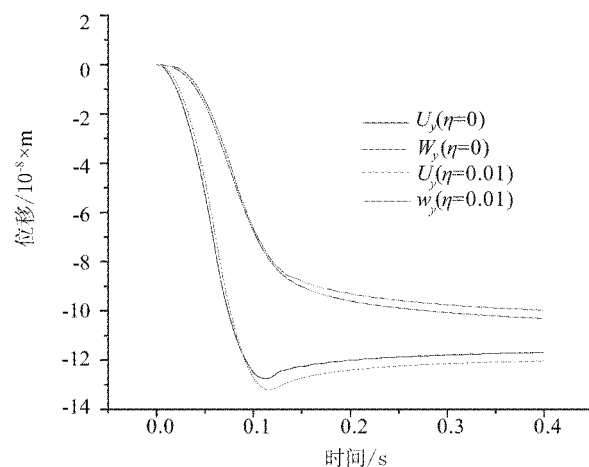


图3 黏性系数对点B的固相位移和流相位移影响

## 4 结论

根据 Biot 黏弹性流体饱和两相多孔介质波动方程,采用解耦技术,建立了以固相位移和流相位移为未知量的黏弹性流体饱和孔隙介质动力分析的显式有限元方法,该方法克服了隐式方法需要求解联立方程组的缺点,具有节省计算机内存空间和计算时间的优点。退化分析表明,该方法具有较高的计算精度;最后,利用该方法以一维流体饱和黏弹性介质为例,分析了黏性系数对动力响应的影响。结果表明,由于介质的黏性引起的滞后效应,使得初始固相位移和流相位移较小;而黏性引起的蠕变效应,使得后期固相位移和流相位移增大。

### 参 考 文 献

- 1 孙 钧. 岩土材料流变及其工程应用. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999
- 2 Biot M A. Theory of propagation of wave in fluid-saturated porous solid. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956; 28(2): 168—178
- 3 赵成刚, 王进廷, 史培新, 等. 流体饱和两相多孔介质动力反应分析的显式有限元法. 岩土工程学报, 2001; 23(2): 178—182
- 4 Mesgouez A, Lefeuvre-Mesgouez G, Chambarel A. Transient mechanical wave propagation in semi-infinite porous media using a finite element approach. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2005; (25): 421—430
- 5 赵成刚, 王进廷, 史培新, 等. 流体饱和两相多孔介质动力反应分析的显式有限元法. 岩土工程学报, 2001; 23(2): 178—182
- 6 王进廷, 杜修力, 赵成刚. 液固两相饱和和介质动力分析的一种显式有限元法. 岩石力学与工程学报, 2002; 8 21(8): 1199—1204
- 7 Liao Z P, Wong H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1984; 3(4): 176—183
- 8 Zienkiewicz O C, Morgan K. 有限元与近似法. 陶振宇, 张 良, 周之德, 等译, 北京: 人民交通出版社, 1989
- 9 李小军, 廖振鹏, 杜修力. 有阻尼体系动力问题的一种显式解法. 地震工程与工程振动, 1992; 12(4): 74—79
- 10 Simon B R, Zienkiewicz O C, Plaul D K. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1984; 8: 381—398
- 11 杨 骁, 张 燕. 一维流体饱和和粘弹性多孔介质层的动力响应. 力学季刊, 2005; 26(1): 44—52

## Dynamic Analysis of Fluid Saturated Porous Viscoelastic Media by Explicit Finite Element Method

TIAN Ying-chun, ZHANG Zi-mao<sup>1</sup>, ZHAO Chang-gang<sup>1</sup>, MA Jian-wei, YANG Hui-zhu

(Institute of seismic exploration, School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China;

Department of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University<sup>1</sup>, Beijing 100044, P. R. China)

**[Abstract]** The fluid saturated porous viscoelastic media is closer to actual stratum than Biot media and single-phase media, and the researches on its dynamic response will be more reliable. A numerical investigation in the time domain of dynamic response on semi-infinite porous saturated viscoelastic medium is proposed. An explicit finite element method for dynamic analyses of fluid saturated porous viscoelastic medium was derived on the basis of the classical Biot's theory with uncoupling technical. Comparing with the conventional implicit methods which need to solve simultaneous equations, our algorithm has the advantages of saving computer memory and computing effort. It achieves satisfying accuracy in contrast with analytical methods. Taking one-dimensional fluid saturated viscoelastic porous medium as example, the influence of viscous coefficient on the dynamic responses has been investigated.

**[Key words]** fluid-saturated porous viscoelastic media    explicit finite element method    dynamic response