

金融数据二进小波随机特性分析

褚万霞

(西北政法大学经管院, 西安 710063)

摘要 金融数据分析是金融投资的重要依据。金融数据的不确定性可以用统计模型进行描述。讨论和分析了金融数据在二进小波域的统计特性, 并利用仿真实验进行了验证。

关键词 金融数据 二进小波 统计特性

中图分类号 F830.59; **文献标志码** A

随着我国金融体系和金融产品的发展, 作为金融投资基本依据的金融数据分析已具有了越来越重要的作用。从统计学的角度来看, 现实中每个具体的金融数据都可以视为是一个样本实现, 具有某种随机性, 这种随机性总是在和某个具体的概率密度分布总体发生联系^[1,2]。如果可以确定金融资产收益率对应的样本总体, 从理论上说, 就掌握了相应的金融数据的全面的概率特性。原始金融数据记录了时间域的信息, 利用二进小波变换可以将原始数据映射到二进小波域, 二进小波变换除包含有时域信息外, 还包含有尺度信息, 且在每一个尺度均不改变原始数据样本数^[3-5]。本文讨论和分析了金融数据在二进小波域的统计特性, 可作为进一步进行金融决策的基础。

1 金融数据的二进小波表示

由于二进小波具有的优良特性, 其有潜力运用于金融数据分析领域。

1.1 连续小波变换的容许性条件

设 f 是平方可积函数, 即 $f \in L^2(R)$, $\psi(t)$ 是一个均值为0的平方可积函数:

2009年10月27日收到

* 作者简介: 褚万霞(1969—), 女, 宁夏固原市人, 西北政法大学经济管理学院讲师, 研究方向: 数量经济学。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1)$$

它有规范化的范数 $\|\psi\| = 1$, 且能量集中在以 $t = 0$ 为中心的邻域内。对 $\psi(t)$ 做伸缩 s , 平移 u 可得到一族时频原子

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (2)$$

这些原子仍然有规范化的范数 $\|\psi_{u,s}\| = 1$, 则 f 关于时间 u , 尺度 s 的小波变换为

$$Wf(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt = f \bar{\psi}_s(u) \quad (3)$$

式(3)中, $\psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right)$ 表示 $\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$ 的共轭, $\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{-t}{s}\right)$ 。

$\bar{\psi}_s(t)$ 的傅立叶变换为:

$$\hat{\bar{\psi}}_s(w) = \sqrt{s} \hat{\psi}^*(sw) \quad (4)$$

信号 f 的小波变换将信号 f 变成了一个关于时间尺度的二维函数, 它表明了信号 f 在小波单位时间频率的信息。

设 $\psi \in L^2(R)$ 是实函数且满足

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw < +\infty \quad (5)$$

则对任意 $f \in L^2(R)$, 均有:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} \quad (6)$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2} \quad (7)$$

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw < +\infty \text{ 叫做小波容许性条件。}$$

为保证该条件积分有限,则必须要求 $\hat{\psi}(0) = 0$ 。

2.2 二进小波变换

能量有限信号 $f \in L^2(R)$ 的二进小波变换为:

$$Wf(u, s) \leq f, \psi_{u,j} \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{2^j}\right) dt = f \bar{\psi}_j(u) \quad (8)$$

式(8)中, $u \in R, j \in Z, \bar{\psi}_j(t) = \psi_j(-t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{-t}{2^j}\right)$ 。即尺度因子离散化,平移因子连续。

2.2.1 框架条件

若对于小波变换 $W(\cdot)$ 和相应的小波母函数的频率域表示 $\hat{\psi}(\cdot)$, 存在两个常数 $A > 0$ 和 $B > 0$ 使得

$$\forall w \in R - \{0\}, A \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j w)|^2 \leq B \quad (9)$$

则

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \|Wf(u, 2^j)\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (10)$$

如果 $\hat{\psi}$ 满足

$$\forall w \in R - \{0\}, \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}^*(2^j w) \hat{\psi}(2^j w) = 1 \quad (11)$$

则

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} Wf(\cdot, 2^j) \bar{\psi}_{2^j}(t) \quad (12)$$

以上条件定义了二进小波的框架条件,二进小波框架条件定义了信号 f 的完全且稳定的表示。

2.2.2 二进小波设计

设 h 是传递函数满足 $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$ 的低通滤波

器,我们构造尺度函数 $\hat{\phi}(w)$

$$\hat{\phi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (13)$$

该式为二进小波二尺度关系的频率域表达,该式已确定了 $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$ 的条件。

相应的小波 $\hat{\psi}(w)$ 定义为

$$\hat{\psi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (14)$$

同样,我们定义一对重构小波函数 $\hat{\phi}(w), \hat{\psi}(w)$

$$\hat{\phi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (15)$$

$$\hat{\psi}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (16)$$

由于二进小波变换是冗余的,因此对于滤波器组 $\hat{h}\left(\frac{w}{2}\right), \hat{g}\left(\frac{w}{2}\right), \hat{h}\left(\frac{w}{2}\right)$ 和 $\hat{g}\left(\frac{w}{2}\right)$ 施加的条件很弱,因此为使用多种形式提供可能。

若滤波器满足

$$\forall w \in [-\pi, \pi], \hat{h}(w) \hat{h}^*(w) + \hat{g}(w) \hat{g}^*(w) = 2 \quad (17)$$

则

$\forall w \in R - \{0\}, \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}^*(2^j w) \hat{\psi}(2^j w) = 1$ 。这表明,通过适当的设计滤波器组,二进小波间接的得到了设计。

2.2.3 样条二进小波

样条函数具有的优良的特性,且符合尺度函数的要求。

m 次盒样条小波是 $1_{[0,1]}$ 与其自身的 $m+1$ 次卷积的平移。当 m 为偶数时以 $t=1/2$ 为中心, m 为奇数时以 $t=0$ 为中心。其傅立叶变换是

$$\hat{\phi}(w) = \left(\frac{\sin(w/2)}{w/2} \right)^{m+1} \exp\left(\frac{-i\varepsilon w}{2}\right),$$

$$\text{其中 } \varepsilon = \begin{cases} 1, m \text{ 为偶数} \\ 0, m \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (18)$$

所以

$$\hat{h}(w) = \sqrt{2} \frac{\hat{\phi}(2w)}{\hat{\phi}(w)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{w}{2} \right)^{m+1} \exp\left(\frac{-i\varepsilon w}{2}\right) \quad (19)$$

在 $w = 0$ 的邻域内取 $\hat{g}(w) = O(w)$, 我们构造有一个消失矩的小波。例如

$$\hat{g}(w) = -i\sqrt{2}\sin\frac{w}{2}\exp\left(\frac{-i\varepsilon w}{2}\right) \quad (20)$$

所得的小波傅立叶变换是

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{w}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) = \\ &= \frac{-iw}{4}\left(\frac{\sin(w/4)}{w/4}\right)^{m+2}\exp\left(\frac{-iw(1+\varepsilon)}{4}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

它是中心在 $t = (1 + \varepsilon)/4$ 的 $m + 1$ 次盒样条的一阶导数。

为设计对偶尺度函数 $\tilde{\phi}$ 和小波 $\tilde{\psi}$, 我们取 $\tilde{h} = \hat{h}$, 因而 $\phi = \tilde{\phi}$, 由二进小波滤波器组之间的关系得到

$$\begin{aligned} \hat{g}(w) &= \frac{2 - |\hat{h}(w)|^2}{\hat{g}^*(w)} = \\ &= -i\sqrt{2}\exp\left(\frac{-iw}{2}\right)\sin\frac{w}{2}\sum_{n=0}^m\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{2n} \end{aligned} \quad (22)$$

2.2.4 à Trous 算法

与 Mallat 算法类似, 二进小波条件下, 也可利用尺度函数和小波函数的二进关系得到相邻尺度尺度系数和小波系数的关系, 再利用零尺度尺度系数与真实信号的等价性得到快速算法。

假设尺度函数与小波 ϕ, ψ 与 $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ 是用滤波器所设计。快速二进小波变换式通过 à Trous 算法来实现。à Trous 的实现过程如下:

$$a_j[n] \leq f(t), \phi_{2^j}(t-n) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi_{2^j}(t-n)dt, \text{ 其中 } \phi_{2^j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\phi\left(\frac{t}{2^j}\right) \quad (23)$$

$$d_j[n] \leq f(t), \psi_{2^j}(t-n) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{2^j}(t-n)dt, \text{ 其中 } \psi_{2^j}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t}{2^j}\right) \quad (24)$$

对任何 $j \geq 0$,

$$a_{j+1}[n] = a_j\bar{h}_j[n] \quad (25)$$

$$d_{j+1}[n] = a_j\bar{g}_j[n] \quad (26)$$

且

$$a_j[n] = \frac{1}{2}(a_{j+1}\bar{h}_j[n] + a_{j+1}\tilde{g}_j[n]) \quad (27)$$

图 1 给出了 à Trous 算法分解过程的框图

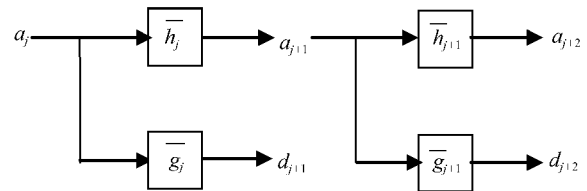


图 1 样条二进小波变换的滤波器组快速实现

二进小波的 à Trous 算法对于原始金融数据而言是一种线性变换, 因此具有正态统计特性的传递保持性^[6-8]; 同时, 由于其对原始数据的采样率很高, 还具有时间域到小波域的平移不变性。

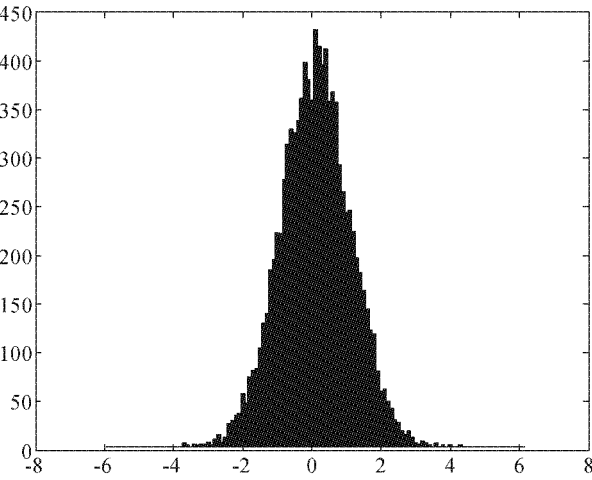
3 实验仿真

可以利用蒙特卡罗模拟来验证金融数据在二进小波域的统计特性。利用来自于标准正态分布的粒子点模拟金融数据, 然后将这些粒子点数据在二进小波的各个尺度上进行投影分解。

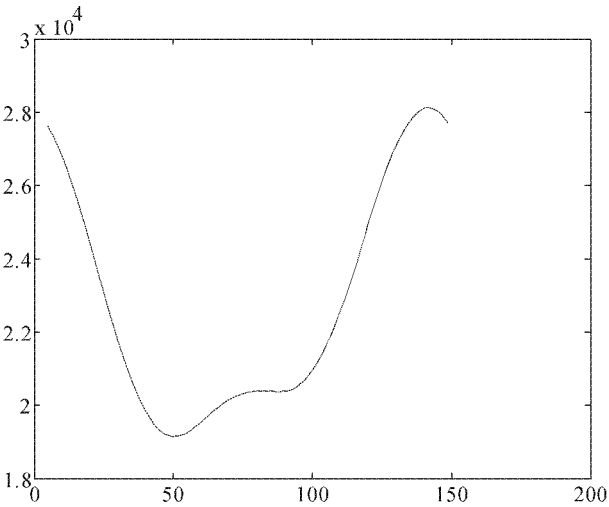
图 2(a) 是服从均值为 0, 方差为 1 的正态分布的金融数据的直方图, 直方图单位间隔为 0.1。图 2(b) 是原始金融数据投影到 1 尺度二进小波域后得到的经过规范化的直方图, 可以看出变换后的数据仍然基本保持正态特性。

图 3(a) 是一段长度为 150 的模拟金融数据, 图 3(b) 是该数据在一尺度二进小波域投影的尺度系数数据, 图 3(c) 是该数据在一尺度二进小波域投影的小波系数数据。图 4(a) 是图 3(a) 中所示数据向前移位 10 后得到的数据, 图 4(b) 是该数据在一尺度二进小波域投影的尺度系数数据, 图 4(c) 是该数据在一尺度二进小波域投影的小波系数数据。从图 3(a)、3(b)、3(c) 及图 4(a)、4(b)、4(c) 中可看出, 金融数据在二进小波域的投影具有平移不变性。

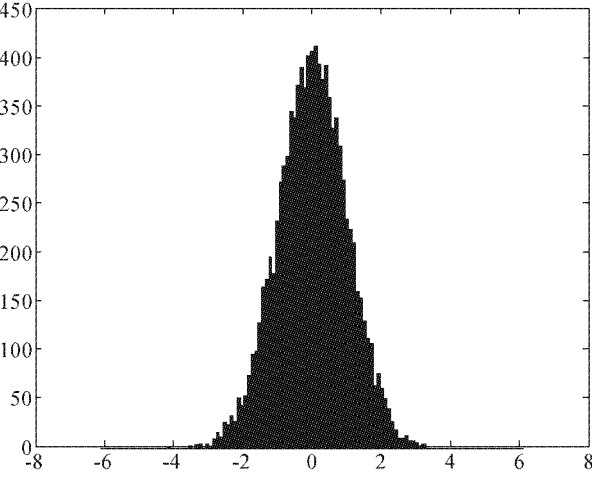
从以上的仿真实验可知, 金融数据在二进小波域具有正态保持性, 同时还具有平移不变性。利用这些特性, 可利于后续的统计决策等处理。



(a) 原始金融数据直方图

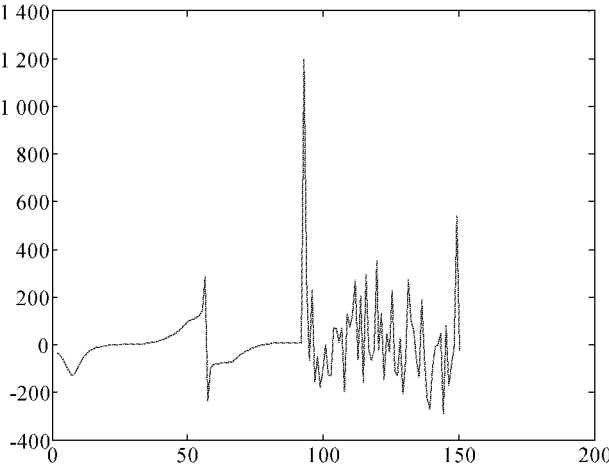


(b) 1 尺度尺度信号



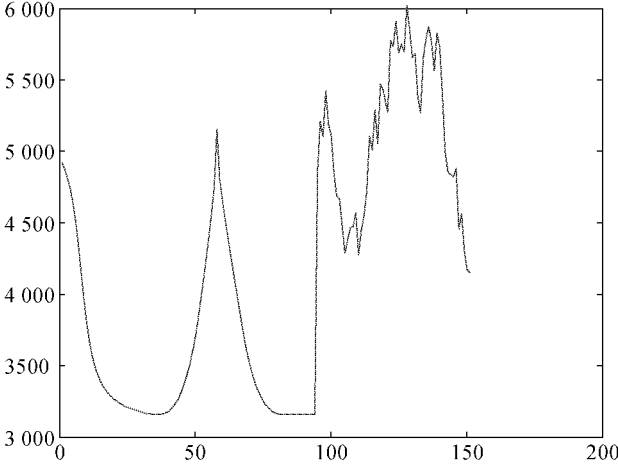
(b) 二进小波域一尺度数据直方图

图2 原始数据直方图



(c) 1 尺度小波信号

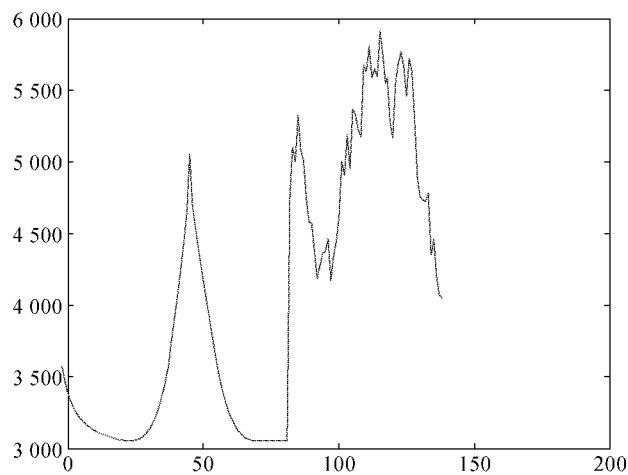
图3 原始数据的二进小波变换



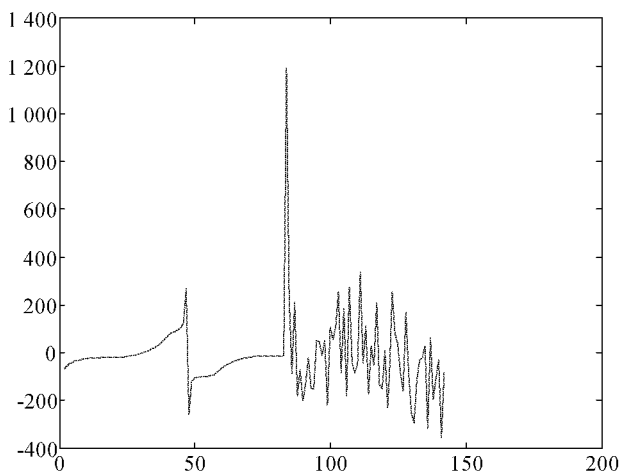
(a) 原始数据

4 结论

金融数据具有某种随机性,这种特性在二进小波各个尺度上具有一定的传递特性。对于正态分布的总体,其在二进小波条件下在各个尺度上保持稳定。对于任意总体,其在二进小波条件下具有平移不变性。在实际应用中,可结合实际处理任务和对象将这些特性应用于多方面。

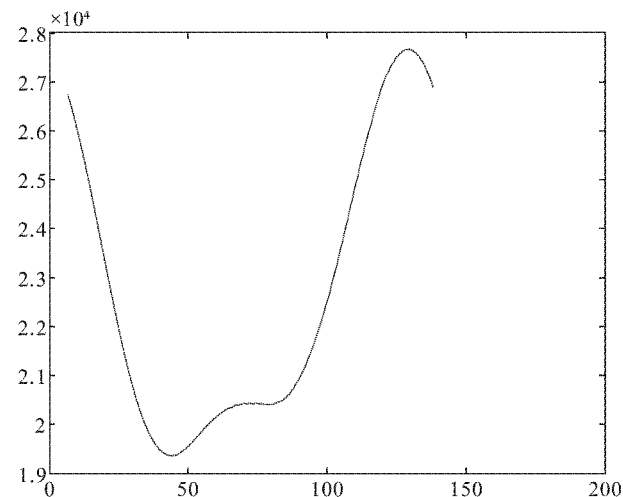


(a) 移位后数据



(c) 1 尺度小波信号

图4 移位后数据的二进小波变换



(b) 1 尺度尺度信号

参 考 文 献

- 1 Mantegna R, Stanley H. Scaling behavior in the dynamics of an economic index. *Nature*, 1995; (376): 46—49
- 2 赵德志. 中国宏观金融风险的统计度量与分析. 沈阳: 东北财经大学硕士论文, 2006
- 3 张之华. 推广的二进小波与信号处理. *经济数学*, 2004; (2): 182—187
- 4 王大凯, 彭进业. 小波分析及其在信号处理中的应用. 北京: 电子工业出版社, 2006
- 5 Mallat S. *A wavelet tour of signal processing*. 2nd edition, San Diego: Academic Press, 1999
- 6 张明恒, 程乾生. 金融资产收益分布的混合高斯分析. *数学的实践与认识*, 2002; 32(3): 416—421
- 7 曹志广, 王安兴, 杨军敏. 股票收益率非正态性的蒙特卡罗模拟实验. *财经研究*, 2005; 31(10): 34—41
- 8 史建平. 基于小波分析的汇率波动序列研究. 西安: 西安电子科技大学硕士论文, 2007

Multiscale Statistical Analysis for Rate of Financial Asset

CHU Wan-xia

(School of Economic Management, Northwest University of Politics and Law, Xi'an 710063, P. R. China)

[Abstract] Analysis of financial data is the basis of financial investing. Financial data can be characterized *via* a corresponding statistics model. The statistical characteristics of financial data in domain of dyadic wavelet are discussed and analyzed. The experiments are verified results.

[Key words] financial data dyadic wavelet statistical characteristic