第10卷 第1期 2010年1月
1671—1815(2010)1-0012-05
科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering
Vol. 10 No. 1 Jan. 2010
© 2010 Sci. Tech. Engng.

一类二阶振动矩阵方程的求解

邵良峰 王国胜[1]

(解放军电子工程学院数学教研室,合肥 230037;装甲兵工程学院控制工程系[1],北京 100072)

摘 要 研究了一类二阶振动矩阵方程的求解问题,该方程在振动控制领域得到广泛应用。针对具有约当对角标准型的特征值情形,提出了一种求解该二阶振动矩阵方程的参数化方法。该参数化方法给出了该矩阵方程中两个未知矩阵的完全参数化表达式,其含有自由参量为二阶振动矩阵方程的解提供了全部自由度。最后,利用所提出的二阶振动矩阵方程的参数化方法对数值算例进行了求解,结果表明该参数化方法的简单和有效性。

关键词 振动 矩阵方程 特征值 参数化

中图法分类号 O231 TP273; **文献标志码** A

在大柔性结构空间、地震工程、机器人、航空航天等很多工程应用领域,经常会遇到处理二阶动力学系统的振动控制问题[1—3],该系统的动态方程可记为

$$\ddot{q} + A\dot{q} + Cq = Bu \tag{1}$$

式(1)中 A , $C \in R^{n\times n}$ 和 $B \in R^{n\times r}$ 是系统参数矩阵; $q \in R^n$, $\dot{q} \in R^n$ 和 $\ddot{q} \in R^n$ 分别是系统的相对位移、速度和加速度向量; $u \in R^r$ 是系统的输入向量。

而二阶动力学系统(1)的许多基本控制问题,如观测器、极点配置及特征结构配置[4—13]等控制问题均与式(2)有关:

$$VJ^2 + AVJ + CV = BW \tag{2}$$

式(2)中 A , $C \in R^{n\times n}$ 和 $B \in R^{n\times r}$ 如前述; $J \in C^{m\times m}$ 为已知矩阵; $V \in C^{n\times m}$ 和 $W \in C^{r\times m}$ 待求。本文中方程(2)称为二阶振动矩阵方程。

本文约定,任何向量 $x_i \in C^n$, $i = 1, 2, \cdots, m$,可简记为 $\{x_i\}$,且记按下述方式构成的矩阵为 $X = [x_i]_{n\times m}$:

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m] \tag{3}$$

2009年10月12日收到

第一作者简介:邵良峰(1963—),安徽合肥人,副教授,研究方向:工程数学理论及应用。

1 方程求解

本文考虑的主要问题是求解二阶振动矩阵方程式(2)。不失一般性,仅考虑方程式(2)中 J 为若当对角标准型的情形。当 J 为一般矩阵时,总可以通过适当变换将其化为若当对角标准型,不妨记矩阵 J 的特征值为 s_i , $i = 1,2,\cdots,m$ 。

当二阶动力学系统式(1)完全可控时[4],即

$$\operatorname{rank}[s^2I + sA + C \ B] = n , \ \forall s \in C \tag{4}$$

成立,则称矩阵组 (A,B,C) 为可控。当条件式(4)满足时,则存在单模阵 $P(s) \in R^{n\times n}$ 和 $Q(s) \in R^{(n+r)\times(n+r)}$ 使得式(5)成立:

$$P(s)[s^2I + sA + C \ B]Q(s) = [0 \quad I] , \ \forall s \in C \tag{5}$$

对矩阵 $Q(s)$ 如下分块:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$Q_{11}(s) \in R^{n\times r}, Q_{21}(s) \in R^{r\times r} \tag{6}$$

定理1 假设矩阵组 (A,B,C) 可控,则二阶振动矩阵方程式(2)的全部解由 $V = [v_i]_{n\times m}$ 和 $W = [w_i]_{r\times m}$ 给出,其中 $\{v_i\}$ 和 $\{w_i\}$ 由式(7)给出:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(s_i) \\ -Q_{21}(s_i) \end{bmatrix} f_i\ ,\ i = 1, 2, \cdots, m \quad (7)$$

式(7)中 $\{f_i\} \in \mathrm{C}^r$ 是一组自由参量。

证明　将矩阵方程式(2)写成如下等价形式

$$(s_i^2 I + As_i + C)v_i - Bw_i = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \quad (8)$$

首先证明式(7)中 v_i 和 w_i 是方程式(2)的解。由式(7)和式(8)可得

$$(s_i^2 I + As_i + C)v_i - Bw_i = [s_i^2 I + As_i + C \quad B]\begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} =$$

$$p^{-1}(s_i)[0 \quad I]Q^{-1}(s_i)\begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} =$$

$$p^{-1}(s_i)[0 \quad I]Q^{-1}(s_i)Q(s_i)\begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$p^{-1}(s_i)[0 \quad I]\begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} = 0。$$

也即式(7)成立。

下面证明方程式(8)的解均可由式(7)给出,即完备性证明。

在式(8)两端分别左乘 $P(s_i)$,可得

$$P(s_i)[s_i^2 I + As_i + C \quad B]\begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} = 0,$$

将式(6)代入上式,则有

$$[0 \quad I]\ Q^{-1}(s_i)\begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} = 0\ 。$$

记

$$\begin{bmatrix} f_i \\ e_i \end{bmatrix} = Q^{-1}(s_i)\ \begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

则式(9)等价于

$$[0 \quad I]\ \begin{bmatrix} f_i \\ e_i \end{bmatrix} = 0\ ,$$

故有

$$e_i = 0\ 。$$

从而式(9)等价于

$$\begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} = Q^{-1}(s_i)\ \begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix}。$$

将上式两端同乘以 $Q(s)$,则有

$$\begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} = Q(s_i)\begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix}。$$

并将式(6)代入上式,则有

$$\begin{bmatrix} v_i \\ -w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(s) & Q_{12}(s) \\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix}。$$

将上式展开,可知式(7)成立。通过上述两方面的证明,该定理证毕。

当矩阵组 (A,B,C) 可控时,存在单模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$ 满足式(5),不妨对矩阵 $Q(s)$ 的分块如下标记:

$$Q(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \\ D_1(s) & D_2(s) \end{bmatrix},$$

其中

$$N_1(s) \in \mathrm{C}^{n\times r}\ ,\ N_2(s) \in \mathrm{C}^{n\times n}\ ,$$
$$D_1(s) \in \mathrm{C}^{r\times r}\ ,\ D_2(s) \in \mathrm{C}^{r\times n}\ ,$$

则式(5)等价于

$$[s^2 I + sA + C\ B]\begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \\ D_1(s) & D_2(s) \end{bmatrix} = [0 \quad P^{-1}(s)]\ ,$$

显然下式成立

$$(s^2 I + sA + C)\ N_1(s) - B(-D_1(s)) = 0\ ,$$
$$(s^2 I + sA + C)\ N_2(s) + B\,D_2(s) = P^{-1}(s)\ ,$$

从而可得到满足下述右互质分解表达式

$$(s^2 I + sA + C)^{-1} B = N(s)D(s)^{-1}\ ,\ \forall s \in C \quad (10)$$

的互素矩阵 $N(s)$ 和 $D(s)$ 分别为

$$N(s) = N_1(s)\ ,\ D(s) = -D_1(s) \quad (11)$$

通过引入右互质分解,由定理可推导出下述推论。

推论 1　假设矩阵组 (A,B,C) 可控,则二阶振动矩阵方程(2)的全部解由 $V = [v_i]_{n\times m}$ 和 $W = [w_i]_{r\times m}$ 给出,其中 $\{v_i\}$ 和 $\{w_i\}$ 由式(12)给出:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s_i) \\ D(s_i) \end{bmatrix} f_i \quad (12)$$

式(12)中 $\{f_i\} \in \mathrm{C}^r$ 是一组自由参量。

定理 1 和推论 1 均给出了二阶振动矩阵方程式(2)解的参数化表达式,针对该解作如下说明:

说明 1:自由参量组 $\{f_i\} \in C^r$ 代表了方程式(2)的解矩阵 V 和 W 中的全部自由度,其个数为 $m \times r$ 。

通过适当选取 $\{f_i\}$，可以得到方程式(2)的具有某些特殊性质的解。

说明 2：利用定理 1 求解二阶振动矩阵方程式(2)时，只需利用矩阵初等变换求解满足(5)的单模阵 $P(s)$ 和 $Q(s)$，然后由公式(7)便可以给出矩阵 V 和 W 的各列。

说明 3：利用推论 1 求解二阶振动矩阵方程式(2)时，只需求解满足式(3)的右互素矩阵 $N(s)$ 和 $D(s)$，然后由公式(12)便可以直接给出矩阵 V 和 W 的各列。

2 求解算法

根据定理 1，可得二阶振动矩阵方程式(2)的求解算法，简记为算法 1，其对应各步骤如下。

1) 计算矩阵 $[s^2I + sA + C\ B]$ 的秩是否满足条件式(4)，即验证系统的可控性。如果系统可控，继续下述各步骤；

2) 计算满足式(5)的单模阵 $P(\mathrm{s}) \in R^{n\times n}$ 和 $Q(\mathrm{s}) \in R^{(n+r)\times(n+r)}$；

3) 对步骤 2)所得矩阵 $Q(s)$ 进行分块，形如式(6)；

4) 给出向量 $f_i \in C^r$，$i = 1, 2, \cdots, m$ 的数值或参量表示；

5) 利用式(7)分别计算矩阵列向量 v_i 和 w_i，$i = 1, 2, \cdots, m$；

6) 将步骤 5)中的矩阵列向量写成矩阵形式，便得矩阵 V 和 W。

根据推论 1，可得二阶振动矩阵方程的另外一种求解算法，简记为算法 2，其对应各步骤如下。

1) 计算矩阵 $[s^2I + sA + C\ B]$ 的秩是否满足条件(4)，即验证系统的可控性。如果系统可控，继续下述各步骤；

2) 计算满足式(5)的单模阵 $P(\mathrm{s}) \in R^{n\times n}$ 和 $Q(\mathrm{s}) \in R^{(n+r)\times(n+r)}$；

3) 对步骤 2)所得矩阵 $Q(s)$ 进行分块，形如式(6)；

4) 标记 $Q(s)$ 的分块矩阵，形如式(11)；

5) 给出向量 $f_i \in C^r$，$i = 1, 2, \cdots, m$ 的数值或参量表示；

6) 利用式(12)分别计算矩阵列向量 v_i 和 w_i，$i = 1, 2, \cdots, m$；

7) 将步骤 6)中的矩阵列向量写成矩阵形式，便得矩阵 V 和 W。

3 数值算例

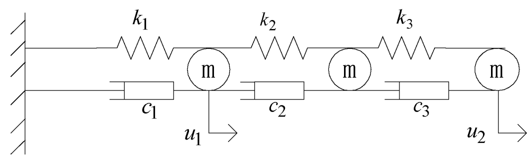

图 1 三级质量弹簧系统

研究如图 1 所示的三级质量弹簧系统[4]，其对应的二阶振动矩阵方程(2)中的参数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -2.5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 5 & -25 & 20 \\ 0 & 20 & -20 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

容易验证矩阵组 (A, B, C) 可控；利用矩阵初等变换求得满足式(5)的单模阵 $P(s) = I_3$ 和

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{40}s + \frac{1}{100}s^2 & -4 & 0 & \frac{1}{4} - \frac{1}{50}s & 0 \\ \frac{1}{200}s - \frac{1}{20} & 0 & 0 & \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 & \gamma & 0 \\ \frac{1}{100}(s+10)^2 & s^2 + 2s + 20 & 0 & \frac{1}{50}s - \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

其中：$\alpha = -\frac{1}{100}s^4 + \frac{1}{20}s^3 + \frac{29}{100}s^2 - \frac{33}{40}s - \frac{9}{4}$，$\beta = 4s^2 - 10s - 40$，$\gamma = \frac{1}{50}s^3 - \frac{3}{10}s^2 + \frac{21}{50}s + \frac{49}{20}$

从而由式(11)可知满足式(10)的既约分解矩阵为

$$N(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{40}s + \frac{1}{100}s^2 & -4 \\ \frac{1}{200}s - \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$D(s) = \begin{bmatrix} A & -4s^2 + 10s + 40 \\ -\frac{1}{100}(s+10)^2 & -s^2 - 2s - 20 \end{bmatrix}。$$

式中 $A = \frac{1}{100}s^4 - \frac{1}{20}s^3 - \frac{29}{100}s^2 + \frac{33}{40}s + \frac{9}{4}$

假设矩阵$\boldsymbol{J}$的特征值分别为

$$s_1 = -2, s_2 = -3, s_3 = -4, s_4 = -5,$$

此时矩阵$\boldsymbol{J}$阵为下述若当对角标准型:

$$J = \mathrm{diag}(-2, \ -3, \ -4, \ -5)。$$

由算法 2 可知,此时方程式(2)的解矩阵为

$$V = [N(s_1)f_1 \quad N(s_2)f_2 \quad N(s_3)f_3 \quad N(s_4)f_4],$$

和

$$W = [D(s_1)f_1 \quad D(s_2)f_2 \quad D(s_3)f_3 \quad D(s_4)f_4]。$$

记

$$f_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, f_4 = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}。$$

则方程式(2)的矩阵通解为

$$V = \begin{bmatrix} A1 & A2 & A3 & A4 \\ -\frac{1}{25}x_1 & -\frac{7}{200}x_2 & -\frac{3}{100}x_3 & \frac{1}{40}x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}。$$

式中 $A1 = -\frac{4}{25}x_1 - 4y_1, A2 = -\frac{17}{200}x_2 - 4y_2, A3 = \frac{1}{100}x_3 - 4y_3, A4 = \frac{1}{8}x_4 - 4y_4$。

和

$$W = \begin{bmatrix} 4y_1 & B2 & B3 & B4 \\ C1 & C2 & C3 & C4 \end{bmatrix}。$$

式中 $B2 = -\frac{27}{40}x_2 - 26y_2, B3 = \frac{7}{100}x_3 - 64y_3, B4 = \frac{27}{8}x_4 - 110y_4, C1 = -\frac{16}{25}x_1 - 20y_1, C2 = -\frac{49}{100}x_2 - 23y_2, C3 = -\frac{9}{25}x_3 - 28y_3, C4 = -\frac{1}{4}x_4 - 35y_4$。

若取自由参量为

$x_1 = y_2 = x_3 = y_4 = 1, y_1 = x_2 = y_3 = x_4 = 0$,

则与其相对应的解矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} -0.16 & -4 & 0.01 & -4 \\ -0.04 & 0 & -0.03 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

和

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -26 & 0.07 & -110 \\ -0.64 & -23 & -0.36 & -35 \end{bmatrix}。$$

4　结论

本文给出了一类二阶振动矩阵方程的一种参数化解,通过一系列矩阵初等变换和矩阵计算,便可算得该方程解矩阵的参数化化表达式,其所含参数提供了解的自由度,选取不同参数可获得不同的数值解。最后,数值例子表明本文所给方程的求解方法的简单及有效性。

参　考　文　献

1　Yao J T P. Concept of structure control. ASCE Journal of Structure Division, 1972; 98(7): 1567—1574

2　欧进萍. 结构振动控制:主动、半主动和智能控制. 北京:科学出版社, 2003

3　张春巍,欧进萍. 结构振动控制 Benchmark 研究发展综述. 现代土木工程理论与实践,南京:河海大学出版社,2003

4　Wang Guosheng, Liang Bing, Duan Guangren. Reconfiguring second-order dynamic systems via state feedback eigenstructure assignment. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2005; 3(1): 109—116

5　Wang Guosheng, Lü Qiang, Duan Guangren. Partial eigenstructure assignment via P-D feedback in second-order descriptor linear systems. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 2006; 3(2): 1022—1029

6　Wang Guosheng, Lü Qiang, Liang Bing, *et al.*, Design of reconfiguring control systems via state feedback eigenstructure assignment. International Journal of Information Technology, 2005; 11(7): 61—70

7　Wang Guosheng, Lü Qiang, Duan Guangren. H2-optimal control with regional pole assignment via state feedback. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2006; 4(5): 653—659

8　Wang Guosheng, Lü Qiang, Duan Guangren. Eigenstructure assignment in a class of second-order dynamic systems. Journal of Control Theory and Applications, 2006; 4(3): 302—308

9 Wang Guosheng, Yang Guozhen, Duan Guangren. Partial pole assignment by constant gain feedback in two classes of frequency-domain models. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2007; 5(2): 111—116

10 Wang Guosheng, Duan Guangren. Parameterization of PID eigenstructure assignment in second-order linear systems. International Journal of Modeling, Identification and Control, 2007;2(2): 100—105.

11 Wang GuoSheng, Lü Qiang, Duan Guangren. On the parametric solution to the second-order sylvester matrix equation EVF2-AVF-CV = BW. Mathematic Problems in Engineering, 2007; 2(2): 1—16

12 Wang Guosheng, Wang Haoqian, Duan Guangren. On the robust solution to a class of perturbed second-order sylvester equation. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2009; 16(1): 439—449

13 Wang GuoSheng, Duan Guangren. Parameterisation of reconfiguring second-order linear systems via eigenstructure assignment. Int J Modeling Identification and Control, 2008; 3(2): 124—130

On the Solution of a Class of Second-order Vibration Matrix Equations

SHAO Liang-feng, WANG Guo-sheng[1]

(Department of mathematics, Electronic Engineering Institute of PLA, Hefei 230037, P. R. China;
Department of Control Engineering, Academy of Armored force Engineering[1], Beijing 100072, P. R. China)

[**Abstract**] Solution of a class of second-order vibration matrix equations is investigated, which are widely used in vibration control fields. In the case of the eigenvalues with the Jordan diagonal canonical form, a parametric method is proposed. The proposed method offers the complete parametric expressions of two unknown matrices in the second-order vibration matrix equation, and the parameters presents all the degrees of freedom for the solution of second-order vibration matrix equation. Finally, using the proposed parametric method is solved a numerical example and the results show the simplicity and effectiveness of the proposed parametric method.

[**Key words**] vibration matrix equations eigenvalue parameterization