第10卷 第1期 2010年1月
1671—1815(2010)1-0183-04

科 学 技 术 与 工 程
Science Technology and Engineering

Vol. 10 No. 1 Jan. 2010

求解约束优化问题的一类单参数填充函数

王历权 叶仲泉* 刘 津

(重庆大学数理学院,重庆 400030)

摘 要 全局优化问题在科学计算、工程技术、经济管理等领域得到越来越广泛的应用,近些年来,人们相继提出一些求解无约束全局优化问题的算法,但对于求解约束优化问题的填充函数鲜有讨论。求解全局优化问题的填充函数法的关键之一在于构造一个叫作填充函数的辅助函数,文章在无强制性条件下给出了一类新的求解带一般约束优化问题的单参数填充函数,讨论了其良好的填充性质,并按其理论性质设计了一个算法,数值实验表明该函数是有效的。

关键词 约束优化 填充函数 全局极小点 可行域

中图法分类号 O221.2; **文献标志码** A

全局优化问题在科学计算、工程技术、经济管理等领域得到越来越广泛的关注和应用,近些年来,人们相继提出一些求解全局优化问题的算法,填充函数法属于其中的确定型算法,最早由Ge[1]提出,用来求解无约束多极值函数的全局极小点。这种算法的关键是构造一个称为填充函数的辅助函数,其基本思想是借助辅助函数,从目标函数的当前局部极小点找到另一个目标函数值更小的局部极小点,直至找到全局最小点为止。

Ge之后,不少学者相继提出了不少性质良好的填充函数,但基本上都是针对无约束优化问题的,对于求解约束优化问题的填充函数虽有讨论,如文献[2—7],但都有各自不同程度的缺陷。本文在无强制性条件下给出了一类性质良好的求解带一般约束优化问题的单参数填充函数,并讨论了其填充性质。

2009年10月9日收到

第一作者简介:王历权(1985—),男,汉族,重庆巫溪人,硕士研究生,研究方向:最优化理论与方法。E-mail:wanglq8538974@126.com。

*通信作者简介:叶仲泉(1961—),男,汉族,四川自贡人,博士,重庆大学教授,研究方向:最优化理论与方法、神经网络等。

1 基本概念

考虑带约束全局优化问题 (P):$\min f(x)$, s.t. $x \in S = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leqslant 0, i \in \Gamma\}$,其中 $f(x), g_i(x), i \in \Gamma: R^n \to R$ 是连续可微函数,$\Gamma = \{1,2,\cdots,m\}$ 是下标集。对上述问题假设如下。

假设1 问题 (P) 的不同局部极小点的个数可以是无限的,但不同局部极小值个数是有限的。

假设2 用 $L(p)$ 表示问题 (P) 的局部极小点集合,若 x^* 是问题 (P) 的局部极小点,则 $L^{x^*} = \{x \in L(p) \mid f(x) = f(x^*)\}$ 是一个有界闭集,且问题 (P) 存在全局极小点。

注:在很多全局优化的实际问题中,$f(x)$ 的强制性条件不一定满足,因此这里对问题 (P) 的假设中没有考虑到目标函数 $f(x)$ 的强制性条件。下面针对问题 (P) 给出有约束优化问题的填充函数定义。

定义1[4] 函数 $p(x,x^*,a)$ 称为 $f(x)$ 在局部极小点 x^* 处的填充函数,如果它满足:

(1) 在 R^n 空间中,x^* 是 $p(x,x^*,a)$ 的严格局部极大点;

(2) 对 $x \in S_1 \cap S$ 且 $x \neq x^*$ 或 $x \in R^n \setminus S$ 有

$\nabla p(x,x^*,a) \neq 0$，这里 $S_1 = \{x \in R^n \mid f(x) \geq f(x^*)\}$；

(3) 如果 x^* 不是全局极小点，那么 $p(x,x^*,a)$ 一定在 $S_2 = \{x \in S \mid f(x) < f(x^*)\}$ 上有局部极小点。

以上定义的填充函数的意义为：对于有约束最优化问题，首先要考虑的就是求出来的点是否可行。由条件(2)知，要找的点一定在可行域内；其次，对于全局最优化问题的填充函数法，关心的是比当前局部极小点更好的那些点，由条件(2)知，要找的点一定不会再比当前局部极小点差的水平集上达到。若 x^* 是局部极小点但不是全局极小点，由定义中的条件(1)和条件(3)，则可以从 x^* 的邻域中的任意一点出发，用求无约束最优化问题的极小化方法极小化填充函数，总能找到填充函数的局部极小点 x_0^*，由条件(3)知，$f(x_0^*) < f(x^*)$，再由条件(2)，对 $x \in S_1 \cap S$ 且 $x \neq x^*$ 或 $x \in R^n \backslash S$ 有 $\nabla p(x,x^*,a) \neq 0$，得知 $x_0^* \in S$。

2 填充函数及其性质

针对问题 (P)，设 x^* 是当前局部极小点，构造单参数填充函数如下。

1) $$p(x,x^*,a) = -\varphi(1 + \|x - x^*\|^3) + a\min[0,\max(f(x) - f(x^*), g_i(x), i \in \Gamma)]。$$

其中 $a > 0$ 是参数，函数 $\varphi(t)$ 满足：1) $\varphi(0) = 0$，2) $\varphi'(t) > 0$，这样的函数有 $1 - e^{-t}$, $\arctan t$, $\dfrac{t}{1+t}$ 等。

当参数 $a > 0$ 充分大时，下面的几个定理表明 $p(x,x^*,a)$ 是满足定义 1 的一类填充函数。

定理 1 对任意 $a > 0$，x^* 是 $p(x,x^*,a)$ 的严格局部极大点。

证明 因为 x^* 是 $f(x)$ 的局部极小点，则存在它的一个邻域 $N(x^*,\delta)(\delta > 0)$，使得 $\forall x \in N(x^*,\delta) \cap S$，有 $f(x) \geq f(x^*)$，$g_i(x) \leq 0, i \in \Gamma$。

下面分两种情况来证明对 $\forall x \in N(x^*,\delta)$，$p(x,x^*,a) < p(x^*,x^*,a)$ 成立。

(1) 当 $x \in N(x^*,\delta) \cap S, x \neq x^*$ 时，由于 $f(x) \geq f(x^*)$，则有 $\min[0,\max(f(x) - f(x^*), g_i(x), i \in \Gamma)] = 0$ 于是 $p(x,x^*,a) = -\varphi(1 + \|x - x^*\|^3) < -\varphi(1) = p(x^*,x^*,a)$。

(2) 当 $x \in N(x^*,\delta) \cap (R^n \backslash S)$ 时，则至少存在一个指标 $i_0 \in \Gamma$，使得 $g_{i_0}(x) > 0$，故 $\min[0,\max(f(x) - f(x^*), g_i(x), i \in \Gamma)] = 0$，于是同(1)有结论成立。

综上，$p(x,x^*,a) < p(x^*,x^*,a)$ 对于 $\forall x \in N(x^*,\delta)$ 都成立。因此，x^* 是 $p(x,x^*,a)$ 的严格局部极大点。

定理 2 若 x^* 是 $f(x)$ 的局部极小点，则 $p(x,x^*,a)$ 在 $(S \cap S_1)\backslash\{x^*\}$ 或 $R^n \backslash S$ 上有 $\nabla p(x,x^*,a) \neq 0$ 成立。

证明 易得对 $\forall x \in S \cap S_1$ 或 $R^n \backslash S$ 都有 $\min[0,\max(f(x) - f(x^*), g_i(x), i \in \Gamma)] = 0$，此时，$p(x,x^*,a) = -\varphi(1 + \|x - x^*\|^3)$，显然 $\nabla p(x,x^*,a) \neq 0$。

定理 3 若 x^* 是 $f(x)$ 的局部极小点，但不是 $f(x)$ 的全局极小点，且 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, S) = \mathrm{cl}(S)$，则当 $a > 0$ 充分大时，一定存在 $x_0^* \in S_2$，使得 x_0^* 是 $p(x,x^*,a)$ 的局部极小点。

证明 因为 x^* 是 $f(x)$ 的局部极小点但非全局极小点，则存在 $f(x)$ 的另一个局部极小点 x_1^*，使得 $f(x_1^*) < f(x^*)$，$g_i(x_1^*) \leq 0, i \in \Gamma$。

由于 $f(x), g_i(x), i \in \Gamma$ 是连续函数，且 $\mathrm{cl}(\mathrm{int}\, S) = \mathrm{cl}(S)$，则一定存在 $x_2^* \in R^n$，使得 $f(x_2^*) < f(x^*)$，$g_i(x_2^*) < 0$，故有

$$p(x_2^*,x^*,a) = -\varphi(1 + \|x_2^* - x^*\|^3) + a\max\{f(x_2^*) - f(x^*), g_i(x_2^*), i \in \Gamma\}。$$

显然 $L^{x_1^*} \subset S$，$x_2^* \in \mathrm{int}\, S \cap S_2$。

另一方面，对 $\forall x \in \partial S$，至少存在一个指标 $i_1 \in \Gamma$，使得 $g_{i_1}(x) = 0$，于是当 $x \in \partial S$ 时有 $\min[0,\max(f(x) - f(x^*), g_i(x), i \in \Gamma] = 0$，从而 $p(x,x^*,a) = -\varphi(1 + \|x - x^*\|^3)$。

所以，当 $a > 0$ 充分大时，对 $\forall x \in \partial S$，有 $p(x_2^*, x^*, a) < p(x, x^*, a)$。显然，$S \backslash \partial S$ 是开集，于是当 $a > 0$ 充分大时存在一点 $x_0^* \in S \backslash \partial S$ 使得

$$\min_{x \in S} p(x, x^*, a) = \min_{x \in S \backslash \partial S} p(x, x^*, a) = p(x_0^*, x^*, a) \leqslant p(x_2^*, x^*, a),$$

故 $x_0^* \in \mathrm{int}\, S$，且 $f(x_0^*) < f(x^*)$。

定理 4　若 x^* 是 $f(x)$ 的全局极小点，则对 $\forall x \in S, x \neq x^*$ 都有 $p(x, x^*, a) < 0$。

证明　由于 x^* 是 $f(x)$ 的全局极小点，则对所有的 $x \in S$ 都有 $f(x) \geqslant f(x^*)$ 成立。因此，由定理 1，对 $\forall x \in S, x \neq x^*$ 有 $p(x, x^*, a) < 0$ 成立。

定理 5　任给 $x_1, x_2 \in R^n$，若 $f(x_1) \geqslant f(x^*)$，$f(x_2) \geqslant f(x^*)$，则 $\| x_2 - x^* \| > \| x_1 - x^* \|$ 当且仅当 $p(x_2, x^*, a) < p(x_1, x^*, a)$。

证明　若 $f(x_1) \geqslant f(x^*)$，$f(x_2) \geqslant f(x^*)$，则 $\min[0, \max(f(x_j) - f(x^*), g_i(x), i = \in \Gamma)] = 0$，$j = 1,2$，此时有 $p(x_j, x^*, a) = -\varphi(1 + \| x_j - x^* \|^3)$，显然有 $p(x_2, x^*, a) < p(x_1, x^*, a)$，反之亦然。

定理 6　如果 $x_1, x_2 \in R^n$ 并且满足 $f(x_1) \geqslant f(x^*) \geqslant f(x_2)$ 和 $\| x_2 - x^* \| > \| x_1 - x^* \|$，则 $p(x_2, x^*, a) < p(x_1, x^*, a)$。

证明　由条件，$p(x_2, x^*, a) = -\varphi(1 + \| x_2 - x^* \|^3) + a\max[f(x_2) - f(x^*), g_i(x_2), i \in \Gamma]$。

且 $p(x_1, x^*, a) = -\varphi(1 + \| x_1 - x^* \|^3)$，显然结论是成立的。

注：定理 4 – 定理 6 说明目标函数当前的极小点 x^* 被淘汰，而新的填充函数的极小点将会被找到，并且目标函数在这个点的函数值不比当前极小点处的函数值大。这也正是本文的填充函数所具有的良好性质之一。

3　算法和数值实验

3.1　算法

根据上述理论，参考文献[7]给出下述算法。

(0) 初始步：选取初始点 $x_k \in S$；选取 $A > 0$ 作为可接受的终止参数；令 $a = 1, k = 1$；

(1) 以 x_k 为初始点，应用局部下降算法求得问题 (P) 的一个局部极小点，记作 x_k^*；

(2) 选取初始点列 $\{x_{k+1}^i : i \in \Gamma\}$，使得对于某个 $\delta_k > 0$ 有 $x_{k+1}^i \in S \backslash N(x_k^*, \delta_k)$；

(3) 令 $i = 1$；

(4) 若 $i \leqslant m$，令 $x = x_{k+1}^i$，转步(5)；否则，转步(7)；

(5) 若 $f(x) < f(x_k^*)$，且 $x \in S$，则以 x 为初始点，应用已有局部下降算法求问题 (P) 的局部极小点 x_{k+1}^*，使得 $f(x_{k+1}^*) < f(x_k^*)$，令 $x_k^* = x_{k+1}^*, k = k + 1$，转步(2)；否则，转步(6)；

(6) 沿方向 $D_1 = -\nabla p(x, x_k^*, a)$ 或者 $D_2 = -\dfrac{\nabla f(x)}{\| \nabla f(x) \|} - \dfrac{\nabla p(x, x_k^*, a)}{\| \nabla p(x, x_k^*, a) \|}$，找到一个新的点 x，使得 $p(x, x^*, a)$ 能下降到一定程度。若在极小化过程中，x 超出 S 的边界，则令 $i = i + 1$，转步(4)，否则，转步(5)；

(7) 令 $a = 2a$。若 $a \leqslant A$，转步(3)；否则，算法终止，视 x_k^* 为问题 (P) 的全局极小点。

注：下降方向 D_1、D_2 的合理性及优越性在文献[7]中有详细的说明，不再赘述。

3.2　实验

通过两个算例的数值实验验证算法的可行性与有效性。算例都是在 Matlab7.1.0 运行环境中实现的。

算例 1

$$\min f(x) = 4x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_2^4 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 - x_1 x_2$$

s.t. $x \in \{(x_1, x_2) \mid -3 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 3\}$ 全局极小点 $x^* = (0.090\,1, 0.712\,2)^{\mathrm{T}}$，全局极小值 $f(x^*) = -1.133\,1$。

算例 2

$$\min f(x) = (x_1^6 - 16x_1^5 + 86x_1^4 - 176x_1^3 + 105x_1^2)/100 + x_2^2(x_2^2 - 6x_2 + 8)(x_2^2 - 14x_2 + 48)/100。$$

s.t. $x \in \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leqslant 10, x_1, x_2 \geqslant 0, 0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 8\}$。全局极小点 $x^* = (2.174\,0, 7.341\,9)^{\mathrm{T}}$，全局极小值 $f(x^*) = -9.123\,1$。

用 k 表示迭代次数，x_{k1} 表示第 k 次迭代初始点，

x_k^* 表示第 k 次迭代的局部最优解。迭代过程见表1。

表1 迭代过程及结果

	k	x_{k1}	x_k^*	$f(x_k^*)$
1	1	$(2.0000,2.0000)^T$	$(1.7001,0.8022)^T$	-0.3536
	2	$(2.0000,0.8055)^T$	$(0.0901,0.7122)^T$	-1.1331
2	1	$(0.0000,0.0000)^T$	$(2.1688,0.0010)^T$	-0.6250
	2	$(2.0000,0.1000)^T$	$(0.0009,3.0547)^T$	-1.3519
	3	$(0.0015,3.0306)^T$	$(0.0000,7.3419)^T$	-8.4980
	4	$(0.0106,7.0125)^T$	$(2.1740,7.3419)^T$	-9.1231

参 考 文 献

1 Ge R P, Qin Y F. A class of filled functions for finding a global minimizer of a function of several variables. Journal of Optimization Theory and Applications, 1987; 54(2): 241—252

2 Yang Yongjian, Shang Youlin. A filled function method for unconstrained global optimization. Shanghai: Science College, Shanghai Univevs: ty, 2006; 503—504

3 Zhang L S, Kong Chi, Duan N G, *et al*. A new filled function method for global optimization. Global Optim, 2004; 28: 17—43

4 Wang Weixiang, Shang Youlin, Zhang Liansheng. A filled function method with one parameter for box constrained global optimization. Applied Mathematics and Computation, 2007; 194: 54—66

5 Wang Changyu, Li Duan. Unified theory of augmented Lagrangian methods for constrain - ed global optimization. J Glob Optim, 2009; 44: 433—458

6 Wang Weixiang, Shang Youlin, Zhang Liansheng. A filled function method with one parameter for constrained global optim - ization. Journal of Engineering Mathemati - cs, 2008; 25(5): 795—803

7 Liang Yumei. Filled function methods for nonlinearly global optimization. Shanghai: Science college, Shanghai University, 2006

Class of Filled Functions with One Parameter for Solving Constrained Programming

WANG Li-quan, YE Zhong-quan*, LIU Jin

(College of Mathematics and Physics Chongqing University, Chongqing 400030, P. R. China)

[**Abstract**] Global optimization is widley used in the filleds of science caculation, engineering and economic management. In these years, a lot of algorithms for unconstrained global optimization problems were proposed, but the algorithms for constrained global optimization problems were sparingly gived. One of the vital steps for solving constrained global optimization problems is to construct a function called filled function. A filled function with one parameter was proposed for solving constrained global optimization problems without the mandatory condition. Theoretical properties of the filled function are investigated and an algorithm was developed from the filled function. Numerical experiments showed that the method is effective.

[**Key words**] constrained programming filled function global minimizer feasible region